الرياضيات

السنة الأولى الثانوي

جذع مشترك
شعبة : العلوم الإنسانية

1

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية

مديرية التعليم الثانوي العام

الرّياضيات

السنة الأولى ثانوي

1

جذع مشترك
شعبة
العلوم الإنسانية

إشراف المفتش العام : أحمد شومان

تأليف الأساتذة
قويدر فلاح مقتدر زروقي الأخضر دلول
أمحمد زناقي عبد الرحمان زقاري

بســم اللــه الرحمــن الرحيــم

مقــدمة

يعتبر الكتاب المدرسي، في نظامنا التربوي، الحجر الأساسي للوثائق التربوية والوسائل الأساسية بالنسبة لعمليتي التعليم والتعلم. فوجوده يكتسي أهميــة بالغــة سواء بالنسبة للتلميذ أو الأستاذ، إذ هو مرجع للأول [illegible] بيداغوجــي للثــاني. والواقع أن بعض الكتب المدرسية المستعملة في مرحلة [illegible] الثانوي أصبحــت لا تساير المناهج لا من حيث المحتوى ولا من حيث [illegible] ول، وذلك للاختلال الذي وقع في هذه المرحلة بسبب التغيــرات الكثيرة [illegible] امج دون تغييــر في الكتب المدرسية؛ ونتيجة ذلك كان فقدان الانسجام [illegible] البرامج التعليمية والكتب المدرسية المتداولة.

من هنا جاءت الحاجة الماسة إلى معالجة هذا [illegible] الاختــلال بإعداد كتب جديدة تكون محتوياتها منسجمة مع محتويات البر[illegible] المطبقة. و منها هذا الكتاب: "كتاب الرياضيات" الموجه لتلاميذ السنة الأو[illegible] ري (الجذع المشترك آداب).

إن قضية الكتاب المدرسي لا تكمن في نوعيته وتوفره بين أيــدي التلاميــذ فحسب، بل تتعدى ذلك إلى كيفية استعماله بفعالية وإدراك [illegible] وأساليب استثمار محتوياته والانتفاع به . وهي أمور ينبغي للســادة الأسا[illegible] أن يولوهــا العنايــة والاهتمام اللازمين .

أخيرا، نأمل أن يكون في هذا العمل ما يعزز جهود الأساتذة ويساعدهم علــى أداء مهامهم التربوية، وأن يجد فيه التلاميذ الأداة المشوقة و المحفزة علــى العمــل والاجتهاد في طلب العلم .

والله ولي التوفيق
مدير التعليم الثانوي العام

تـــــــقديم

يتكون هذا الكتاب من الأبواب الخمسة التالية :

1. أنشطة عددية
2. المنطق والمجموعات والعلاقات
3. كثيرات الحدود والمعادلات والمتراجحات
4. الهندسة التحليلية
5. الدوال العددية لمتغير حقيقي

وكل باب مجزأ إلى عدة دروس وكل درس بني وفق المخطط التالي :

1. أنشطة تمهيدية

• أمثلة ملائمة تسمح بالتأكد من إمتلاك التلاميذ للمفاهيم اللازمة لإستيعاب الدروس الجديدة .
• أنشطة مستمدة من المكتسبات السابقة تسمح للتلميذ بإكتشاف المفاهيم الجديدة
• ينبغي أن يحضر التلاميذ هذه الأنشطة خارج الدرس مما يسمح بربح الوقت وإشراك التلاميذ في الدرس .

2. عرض الدرس

الدرس وجيز ومقدم بلغة واضحة بسيطة .
التعاريف والخواص متبوعة بأمثلة ملائمة يمكن أن تكون مرجعاً وتساعد على الفهم والحفظ .

3. التطبيق

أنشطة لتوظيف المكتسبات في وضعيات تسمح بالتوسع .

4. التمارين المحلولة

إعطاء حلول نموزجية من أجل :

1. إكتساب طريقة لحل تمرين .

2. تدريب التلاميذ على كيفية تحرير الحل .

5. التمارين

التمارين المقترحة هي على نوعين :

1. تمارين للتطبيق المباشر تسمح بمراقبة المكتسبات .

2. تمارين للتطبيق غير المباشر تسمح بتوظيف المعارف في وضعيات تتطلب تفكيراً ومهارات بهدف تعزيز المكتسبات .

وإنا إذ نقدم هذا الكتاب إلى أبنائنا تلاميذ السنة الأولى ثانوي ، الجذع المشترك آداب ، نأمل أن يساهم في تقريب مادة الرياضيات إلى أذهانهم ، وأن يساعدهم في السير قدماً في دراستهم .

أعاننا الله على خدمة الوطن وأبنائه إنه ولي التوفيق .

المشرف

أحمد شومان

1 القواسم والمضاعفات

1 . أنشطة تمهيدية

نشاط 1 : ـ ما هو عدد التلاميذ في قسمك ؟ .
ـ ما عدد أفراد أسرتك ؟ .
ـ ما سنة ميلادك ؟ .
ـ كم يوم جمعة في الأسبوع ؟ .
ـ كم من مرة تحصلت الجزائر على كأس العالم في كرة القدم ؟ .
الجواب عن كل واحد من هذه الأسئلة يتضمن عددا يسمى طبيعيا .

نرمز إلى مجموعة الأعداد الطبيعية بالرمز **ط** ، ونكتب :
ط = { 0 ، 1 ، 2 ، 3 ، . . . ، ن ، . . . }
المجموعة { 1 ، 2 ، 3 ، . . . ، ن ، . . . } تسمى مجموعة الأعداد الطبيعية غير المعدومة ، ونرمز إليها بالرمز **ط*** .

نشاط 2 : لتكن الأعداد الطبيعية :
0 ، 1 ، 2 ، 3 ، 5 ، 7 ، 9 ، 10 ، 11 ، 20 ، 32 ، 39 ، 72 ، 75 .
ـ من بين هذه الأعداد عين تلك التي تقبل القسمة على 2 .
ما هي أرقام آحاد الأعداد التي تقبل القسمة على 2 ؟ .
تذكر القاعدة المناسبة .
ـ من بين الأعداد السابقة ما هي تلك التي تقبل القسمة على 5 ؟ .
ما هي أرقام آحاد الأعداد التي تقبل القسمة على 5 ؟ .
تذكر القاعدة المناسبة .
ـ من بين الأعداد السابقة ما هي تلك التي تقبل القسمة على كل من 3 وَ 9 ؟ .
تحقق أن مجموع أرقام كل عدد يقبل القسمة على 3 أو على9 هو أيضا يقبل القسمة على 3 أو على 9 .
تذكر قاعدة قابلية القسمة على كل من 3 وَ 9 .

نشاط 3 : . أكتب كلا من الجداءات التالية على شكل قوة لعدد طبيعي :

$2 \times 2 \times 2 \times 2 = \dots$

$3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = \dots$

على ماذا يدل كل من 5 وَ 3 في الكتابة 5^3 ؟

أكتب كلا من 5^3 وَ $أ^4$ على شكل جداء .

أكتب كلا من الأعداد التالية على شكل جداء قوى .

$2 \times 2 \times 3 \times 4 \times 9 \times 4 = \dots$

أ × أ × ب × جـ × ب × أ = . . .

نشاط 4 : معنى المساواة : أ = ب × جـ

ليكن العدد الطبيعي 48

تحقق أن 48 يقبل القسمة على 3

وأن : $48 = 3 \times 16$

نقول إن : 48 مضاعف لكل من 3 وَ 16 .

وأن كلا من 3 وَ 16 هو قاسم للعدد 48 .

وبصفة عامة :

> المساواة : أ = ب × جـ تعني :
> أ مضاعف لكل من : ب وَ جـ
> كل من ب وَ جـ قاسم للعدد أ

2 . القواسم والمضاعفات

1 - الأعداد الأولية :

نشاط 1 : أبحث عن قواسم كل من الأعداد الطبيعية التالية :

13 ، 11 ، 10 ، 6 ، 5 ، 4 ، 3 ، 2

ـ ماهي الأعداد التي لها قاسمان فقط ؟ .

ـ ماهي الأعداد التي لها أكثر من قاسمين ؟ .

كل عدد طبيعي له قاسمان فقط يسمى عددا أوليا .

كل عدد طبيعي يقبل أكثر من قاسمين هو عدد غير أولي .

تعريف :

نقول عن عدد طبيعي ب إنه أولي إذا كان عدد قواسمه أثنين فقط هما 1 وَ ب .

أمثلة :

. 17 يقبل قاسمين فقط هما 1 وَ 17 فهو عدد أولي .

. 15 يقبل عدة قواسم هي : 1 ، 3 ، 5 ، 15 فهو غير أولي .

. 42 يقبل أكثر من قاسمين مثلا : 1 ، 2 ، 3 ، 6 ، 7 فهو عدد غير أولي.

. العدد 1 لا يقبل إلا قاسما واحدا فقط هو 1 فهو غير أولي .

. العدد 0 يقبل القسمة على كل عدد طبيعي ماعدا 0 فهو غير أولي .

2 - تحليل عدد طبيعي إلى عوامل أولية :

ليكن العدد الطبيعي 360

. العدد 360 يقبل القسمة على العدد الأولي 2 ، فهو يكتب :

$$180 \times 2 = 360$$

. العدد 180 أيضا يقبل القسمة على العدد الأولي 2 ، فهو يكتب :

$$90 \times 2 = 180$$

. العدد 90 أيضا يقبل القسمة على العدد الأولي 2 ، فهو يكتب :

$$45 \times 2 = 90$$

. العدد 45 لا يقبل القسمة على 2 ، ولكنه يقبل القسمة على العدد الأولي الموالي وهو 3 ويكتب : $15 \times 3 = 45$

. العدد 15 أيضا يقبل القسمة على 3 ، فهو يكتب :

$$5 \times 3 = 15$$

. العدد 5 لا يقبل القسمة على 3 ، لكنه يقبل القسمة على 5 فهو يكتب :

$$1 \times 5 = 5$$

. العدد 1 هو آخر حاصل ، وهو لا يقبل القسمة على أي عدد أولي . لذلك نتوقف عن القسمة .

من خلال هذه المساويات تحقق من أن :

$$360 = 2 \times 180$$
$$= 2 \times (2 \times 90)$$
$$= 2 \times [2 \times (2 \times 45)]$$
$$= 2 \times [2 \times (2 \times (3 \times 15)]$$
$$= 2 \times [2 \times (2 \times [3 \times (3 \times 5)]]$$
$$= (2 \times 2 \times 2) \times (3 \times 3) \times 5$$

$$360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$$

نقول إننا حللنا العدد 360 إلى جداء عوامل أولية وهي : 2 ، 3 ، 5 .

وعمليا نستعمل الوضع التالي :

360	2
180	2
90	2
45	3
15	3
5	5
1	

$$360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$$

3 ـ مضاعفات عدد طبيعي

. ليكن العددان الطبيعيان أ ، ب حيث :

أ = $2^5 \times 3 \times 5^4 \times 7$ ، ب = $2^3 \times 3 \times 5^2$

تحقق أن :

أ = ب × $(2^2 \times 5^2 \times 7)$

أي أ مضاعف للعدد ب .

لاحظ أن تحليل ب إلى جداء عوامل أولية يشمل :

. العامل 2 ثلاث مرات على الأكثر .

. العامل 3 مرة واحدة على الأكثر .

. العامل 5 مرتين على الأكثر .

إذن : تحليل العدد أ الذي هو مضاعف للعدد ب يشمل على الأقل كل العوامل الأولية لتحليل ب .

. من جهة أخرى ليكن أ َ ، ب العددان الطبيعيان :

أ َ = $2^{8} \times 3^{4} \times 5^{2} \times 13$ وَ ب = $2^{3} \times 3 \times 5^{2}$

تحقق أن تحليل أ َ يشمل :

. العامل 2 ثلاث مرات على الأقل .

. العامل 3 مرة واحدة على الأقل .

. العامل 5 مرتين على الأقل .

أي أنه يشمل على الأقل كل العوامل الأولية لتحليل ب .

إذن : العدد أ َ الذي يشمل على الأقل كل العوامل الأولية لتحليل ب هو مضاعف للعدد ب .

وبصفة عامة :

> أ وَ ب عددان طبيعيان غير معدومين .
>
> يكون أ مضاعفا للعدد ب إذا وفقط إذا كان :
>
> . تحليل أ إلى جداء عوامل أولية يشمل على الأقل كل العوامل الأولية لتحليل ب
>
> . أس كل عامل من عوامل أ يساوي على الأقل أس نفس العامل في تحليل ب .

مثال : ليكن العدد الطبيعي ب = $2^{3} \times 3 \times 5^{2}$.

كل مضاعف للعدد ب يشمل :

. العامل 2 ثلاث مرات على الأقل .

. العامل 3 مرة واحدة على الأقل .

. العامل 5 مرتين على الأقل .

ويمكن أن يشمل عوامل أولية أخرى .

. تحقق أن العدد : $2^{3} \times 3 \times 5^{2} \times 7$ مضاعف للعدد ب .

. وأن العدد : $2^{4} \times 3^{4} \times 5$ هو مضاعف آخر للعدد ب .

. وأن العدد : $2^{2} \times 3^{2} \times 5^{2}$ ليس مضاعفا للعدد ب .

4 ـ قواسم عدد طبيعي

. ليكن العددان الطبيعيان أ ، ب حيث :

أ = $2^4 \times 3 \times 5^3 \times 7$ و ب = $2^4 \times 3 \times 5$

تحقق أن :

أ = $(2^4 \times 3 \times 5) \times 5^2 \times 7$

أي أن أ من الشكل : أ = ب × ك

هذه المساواة تعني أن ب يقسم أ .

لاحظ أن تحليل ب إلى عوامل أولية يشمل :

. العامل 2 أربع مرات على الأكثر .

. العامل 3 مرة واحدة على الأكثر .

. العامل 5 مرة واحدة على الأكثر .

فالعوامل الأولية لتحليل العدد ب موجودة كلها في تحليل أ .

. من جهة أخرى :

ليكن العددان الطبيعيان أ وَ بَ حيث :

أ = $2^4 \times 3 \times 5^3 \times 7$ وَ بَ = $3 \times 5^2 \times 7$

لاحظ أن تحليل بَ لا يشمل إلا العوامل الأولية الموجودة في تحليل أ .

وأس كل عامل من بَ يساوي على الأكثر أس نفس العامل في تحليل أ .

تحقق أن :

أ = بَ × $(2^4 \times 5)$

هذه المساواة تعني أن أ مضاعف للعدد بَ وبالتالي بَ قاسم للعدد أ .

وبصفة عامة :

> أ ، ب عددان طبيعيان غير معدومين :
> يكون ب قاسما للعدد أ إذا وفقط إذا كان :
> . تحليل ب إلى عوامل أولية لا يشمل إلا العوامل الأولية لتحليل أ .
> . أس كل عامل من عوامل ب يساوي على الأكثر أس نفس العامل في تحليل أ .

مثال : ليكن العدد الطبيعي أ حيث :

أ = $2^3 \times 3^4 \times 5$

كل قاسم للعدد أ لا يشمل إلا :

. العامل 2 ثلاث مرات على الأكثر .

. العامل 3 أربع مرات على الأكثر .

. العامل 5 مرة واحدة على الأكثر .

مثلا : العدد 2×3 قاسم للعد أ .

العدد $3^2 \times 5$ قاسم للعدد أ .

العدد $2^4 \times 3$ لا يقسم أ (لأن 2 معطى بأس أكبر من أس 2^3 في تحليل أ)

العدد $2^3 \times 3 \times 7$ لا يقسم أ (لأن العامل 7 غير موجود في تحليل أ)

5 - البحث عن قواسم عدد طبيعي

مثال 1 : لنبحث عن قواسم العدد 12

نكتب العدد 12 بالشكل 12 = أ × ب

تحقق أن : $12 = 1 \times 12$

$= 2 \times 6$

$= 3 \times 4$

هذه المساويات تعني أن كلا من : 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 6 ، 12 هو قاسم للعدد 12 .

نرمز إلى مجموعة قواسم 12 بالرمز $ق_{12}$ ونكتب :

$ق_{12}$ = { 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 6 ، 12 }

مثال 2 : لنبحث عن مجموعة قواسم العدد 90

تحقق أن : $90 = 2 \times 3^2 \times 5$

وحسب القاعدة السابقة كل قاسم للعدد 90 هو من الشكل : ق = $2^{م} \times 3^{ن} \times 5^{هـ}$ حيث:

$0 \le م \le 1$ ، $0 \le ن \le 2$ ، $0 \le هـ \le 1$.

هذا يعني أن تحليل ق يشمل :

. العامل 2 مرة واحدة على الأكثر .

. العامل 3 مرتين على الأكثر .

. العامل 5 مرة واحدة على الأكثر .

ولايجاد جميع قواسم العدد 90 نستعمل تحليله إلى عوامل أولية أي :

$90 = 2 \times 3^2 \times 5$ في الطريقة العملية التالية المسماة بالشجرة .

$1 = 5^0 \times 3^0 \times 2$ —— 5^0

$5 = 5^1 \times 3^0 \times 2$ —— 5^1

$3 = 5^0 \times 3^1 \times 2$ —— 5^0

$15 = 5^1 \times 3^1 \times 2$ —— 5^1

$9 = 5^0 \times 3^2 \times 2$ —— 5^0

$45 = 5^1 \times 3^2 \times 2$ —— 5^1

$2 = 5^0 \times 3^0 \times 2$ —— 5^0

$10 = 5^1 \times 3^0 \times 2$ —— 5^1

$6 = 5^0 \times 3^1 \times 2$ —— 5^0

$30 = 5^1 \times 3^1 \times 2$ —— 5^1

$18 = 5^0 \times 3^2 \times 2$ —— 5^0

$90 = 5^1 \times 3^2 \times 2$ —— 5^1

3^0 ، 3^1 ، 3^2 —— 2^0

3^0 ، 3^1 ، 3^2 —— 2^1

مجموعة قواسم 90 هي :

$ق_{90}$ = { 1 ، 2 ، 3 ، 5 ، 6 ، 9 ، 10 ، 15 ، 18 ، 30 ، 45 ، 90 }

لاحظ من جهة أن عدد قواسم 90 هو 12 .

ومن جهة أخرى الجداء (1 + 1) . (2 + 1) . (1 + 1) يساوي 12، حيث الأعداد 1 ، 2 ، 1 هي أسس العوامل الأولية 2 ، 3 ، 5 .

وبصفة عامة:
إذا كان : ل = $أ^{ن}$ × $ب^{م}$ × $جـ^{هـ}$ حيث : أ ، ب ، جـ هي أعداد أولية فإن عدد قواسم ل هو الجداء : (ن + 1) (م + 1) (هـ + 1) .

3 . تطبيقات:

1 . قائمة الأعداد الأولية من 0 إلى 100 .

لايجاد الأعداد الأولية الأصغر من 100 نتبع الطريقة التالية :
بما أن 0 وَ 1 غير أوليين ، فنكتب الأعداد الطبيعية من 2 إلى 100 ، ثم نشطب الأعداد غير الأولية ، كما يلي :
2 عدد أولي ، لكن كل مضاعفات 2 غير أولية ، فلنشطبها .
3 عدد أولي ، لكن كل مضاعفات 3 غير أولية ، فلنشطبها .
5 عدد أولي ، لكن كل مضاعفات 5 غير أولية ، فلنشطبها .
7 عدد أولي ، لكن كل مضاعفات 7 غير أولية ، فلنشطبها .
أتمم هكذا شطب الأعداد غير الأولية ، لتجد قائمة الأعداد الأولية الأصغر من 100.

~~10~~	9	~~8~~	7	~~6~~	5	~~4~~	3	2	
~~20~~	19	~~18~~	17	~~16~~	15	~~14~~	13	~~12~~	11
~~30~~	29	~~28~~	27	~~26~~	25	~~24~~	23	~~22~~	21
~~40~~	39	~~38~~	37	~~36~~	35	~~34~~	33	~~32~~	31
~~50~~	49	~~48~~	47	~~46~~	45	~~44~~	43	~~42~~	41
~~60~~	59	~~58~~	57	~~56~~	55	~~54~~	53	~~52~~	51
~~70~~	69	~~68~~	67	~~66~~	65	~~64~~	63	~~62~~	61
~~80~~	79	~~78~~	77	~~76~~	75	~~74~~	73	~~72~~	71
~~90~~	89	~~88~~	87	~~86~~	85	~~84~~	83	~~82~~	81
~~100~~	99	~~98~~	97	~~96~~	95	~~94~~	93	~~92~~	91

2 . التعرف على عدد أولي :

طريقة عملية للتعرف على عدد أولي .
لكي تعرف إن كان العدد الطبيعي أوليا أم لا نستعمل إما جدول الأعداد الأولية وإما الطريقة العملية المبينة في المثال التالي :

مثال : هل العدد الطبيعي 727 أولي ؟ .
نقسم 727 بالتوالي على الأعداد الأولية 2 ، 3 ، 5 ، 7 ، . . . فنحصل على الجدول التالي :

العدد	القاسم	الحاصل	الباقي
727	2	366	1
	3	262	1
	5	145	2
	7	103	6
	11	66	1
	13	55	12
	17	42	13
	19	38	5
	23	31	14
	29	25	

لاحظ أنه كلما كبر القاسم فإن الحاصل يصغر . وأنه عند القسمة على 29 صار الحاصل 25 أصغر من القاسم 29 .
لذا نتوقف عن القسمة ونستنتج أن 727 أولي ، لأنه لو قسم عدد أولي أكبر من 29 العدد 727 لكان الحاصل أيضا قاسما للعدد 727 ولكنا قد وجدناه قبل قسمة 727 على 29 .
وبصفة عامة:
للبحث فيما إذا كان العدد أ أوليا أم لا نقسم هذا العدد بالتوالي على الأعداد الأولية : 2 ، 3 ، 5 ، 7 ، . . . . نتوقف عن القسمة عندما يظهر أول حاصل أصغر من القاسم ونستنتج أن العدد أ أولي .
ملاحظة : في قسمة ما إذا حصلنا على باقي قسمة معدوم نتوقف عن القسمة ونستنتج أن العدد أ غير أولي .

3 ـ تمارين محلولة

تمرين 1 :

تعرف إن كان العددان الطبيعيان 127 وَ 341 أوليين .

الحل

لنستعمل الطريقة العملية السابقة .

العدد	القواسم	الحواصل	البواقي
341	2	170	1
	3	113	2
	5	68	1
	7	48	5
	11	31	0

العدد	القواسم	الحواصل	البواقي
127	2	63	1
	3	42	1
	5	25	2
	7	18	1
	11	11	6
	13	9	10

الباقي 0 يدل على أن كلا من 11 وَ 31 يقسم 341 .فالعدد 341 غير أولي .

الحاصل 9 أصغر من القاسم 13 فالعدد 127 أولي .

تمرين 2 :

أ ، ب ، جـ أعداد طبيعية حيث :

أ = $11 \times 49 \times 75$ ؛ ب = $11 \times 21 \times 25$ ؛ جـ = 25×49

1) أكتب كلا من أ ، ب ، جـ على شكل جداء عوامل أولية .

2) بين أن أ مضاعف للعدد ب وأن جـ يقسم أ .

الحل

1) نكتب كلا من أ ، ب ، جـ على شكل جداء عوامل أولية .

لدينا : أ = $75 \times 49 \times 11$

$(5 \times 5 \times 3) \times (7 \times 7) \times 11 =$

$11 \times 7^2 \times 5^2 \times 3 =$

ب = $25 \times 21 \times 11$

$(5 \times 5) \times (7 \times 3) \times 11 =$

$11 \times 7 \times 5^{2} \times 3 =$

جـ = 49×25

$(7 \times 7) \times (5 \times 5) =$

$7^{2} \times 5^{2} =$

لدينا : أ = $11 \times 7^{2} \times 5^{2} \times 3$ وَ ب = $11 \times 5^{2} \times 3^{2}$.

تحليل أ يشمل كل العوامل الأولية للعدد ب وبأسس تساوي على الأقل أسس عوامل ب .

فالعدد أ مضاعف للعدد ب .

لدينا : أ = $11 \times 7^{2} \times 5^{2} \times 3$ وَ جـ = $7^{4} \times 5^{2}$.

تحليل جـ لا يشمل إلا العوامل الأولية للعدد أ وبأسس تساوي على الأكثر أسس عوامل أ .

فالعدد جـ يقسم أ .

تـــمـــاريـــن

في كل ما يأتي الأعداد المعتبرة هي أعداد طبيعية .
التحليل إلى جداء عوامل أولية .

1 تعرف إن كانت الأعداد التالية أولية :
1721 ، 869 ، 721 ، 341 ، 127

2 أكتب كلا من الأعداد التالية على شكل جداء عوامل أولية :
- $21 \times 7 \times 25$
- $5^3 \times 4^2$
- $81 \times 27 \times 9$
- $642 + 740 + 120$
- 4×360
- 45×32
- $2 \times 10 \times 72$

3 حلل العدد 2520 إلى جداء عوامل أولية .
أكتب ، باستعمال هذا التحليل ، العدد 2520 على شكل جداء عاملين أحدهما هو عدد أولي . (توجد اربع جداءات) .

. القواسم والمضاعفات

4 ليكن : أ = 360 ، ب = 12
1) أكتب كلا من أ وَ ب على شكل جداء عوامل أولية .
2) اعتمادا على هذين التحليلين بين أن ب يقسم أ .
استنتج حاصل قسمة أ على ب .

5 هل العدد : $3^4 \times 2^2$ قاسم لكل من :
$7 \times 3^5 \times 2$ ؛ $3^5 \times 2^2$ ؛ 5×2^3 ؛ $11 \times 3^5 \times 2$ ؛ 5×2^8 ؟
عين الحاصل في حالة ما إذا كان : $3^4 \times 2^2$ قاسما لعدد من الأعداد السابقة.

6 بين إن كان العدد الطبيعي : $5 \times 3^{2} \times 2^{3}$ مضاعفا لكل من الأعداد الطبيعية:

5×2^{3} ؛ 3×2^{4} ؛ $11 \times 7^{2} \times 5 \times 3^{2} \times 2^{3}$ ؛ $3^{2} \times 2$ ؛ 5×2^{2}

7 عين قواسم كل من الأعداد : 72 ؛ 140 ؛ 110

8 عين خمسة قواسم للعدد الطبيعي : $7 \times 3^{5} \times 2^{3}$

9 لتكن الأعداد الطبيعية:

أ = $5^{3} \times 3 \times 2^{3}$ ؛ ب = $5^{4} \times 3 \times 2^{3}$ ؛ جـ = $5^{2} \times 3 \times 2$

بين أن أ وَ ب مضاعفان للعدد جـ .

10 لتكن الأعداد الطبيعية:

أ = $5 \times 3^{2} \times 2$ ؛ ب = $5^{2} \times 3^{2} \times 2^{2}$ ؛ جـ = $5^{4} \times 3^{2} \times 2^{3}$

بين أن أحد هذه الأعداد قاسم للعددين الآخرين .

2 القـاسم المشترك الأكبر لعدة أعداد

1. أنشطة تمهيدية

نشاط 1 :

. حلل العدد 140 إلى جداء عوامل أولية .

. ما هو عدد قواسم 140 ؟ عين هذه القواسم .

نشاط 2 :

. عين قواسم كل من العددين 60 و 72 .

. عين القواسم المشتركة لهذين العددين .

2 ـ القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين

ليكن العددان الطبيعيان :

أ = $2^3 \times 3^2 \times 5^4$ ؛ ب = $2^4 \times 5 \times 7$

ولنبحث عن قاسم مشترك لهما .

تحليل كل قاسم للعدد أ يشمل :
. العامل 2 ثلاث مرات على الأكثر
. العامل 3 مرتين على الأكثر
. العامل 5 أربع مرات على الأكثر
ولا يشمل عوامل أولية أخرى

تحليل كل قاسم للعدد ب يشمل :
. العامل 2 أربع مرات على الأكثر
. العامل 5 مرة واحدة على الأكثر
. العامل 7 مرة واحدة على الأكثر
ولا يشمل عوامل أولية أخرى

هذا الجدول يبين أن كل قاسم مشترك للعددين أ وَ ب يشمل :
. العامل 2 ثلاث مرات على الأكثر
. العامل 5 مرة واحدة على الأكثر
ولا يشمل عوامل أولية أخرى

هذا يعني أن تحليل كل قاسم مشترك للعددين أ وَ ب يشمل على الأكثر العوامل 2 ؛ 2 ؛ 2 ؛ 5 .

فالعدد : $2^3 \times 5$ هو أكبر قاسم مشترك للعددين أ وَ ب ويسمى القاسم المشترك الأكبر للعددين أ وَ ب ونكتب :

ق م أ (أ ؛ ب) = $2^3 \times 5$

= 40

وبصفة عامة لإيجاد القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين نستعمل القاعدة التالية .

> للحصول على القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين كل منهما أكبر من 1:
> . نحلل كلا من العددين إلى جداء عوامل أولية .
> . نحسب جداء العوامل المشتركة من هذين التحليلين بحيث نأخذ كل عامل مشترك بأصغر أس

مثال 1 : لنبحث عن القاسم المشترك الأكبر للعددين : 132 ، 240

لدينا : $132 = 2^2 \times 3 \times 11$

لدينا : $240 = 2^4 \times 3 \times 5$

ومنه : ق م أ $(132 ، 240) = 2^2 \times 3$

$= 12$

مثال 2 : لنبحث عن القاسم المشترك الأكبر للعددين : 48 ، 240

لدينا : $48 = 2^4 \times 3$

$240 = 2^4 \times 3 \times 5$

ومنه : ق م أ $(132 ، 240) = 2^4 \times 3$

$= 48$

ماذا تلاحظ ؟ .

2 ـ القاسم المشترك الأكبر لعدة أعداد طبيعية .

لتعيين القاسم المشترك الأكبر لعدة أعداد طبيعية كل منها أكبر من 1 نستعمل القاعدة السابقة .

مثال: لنبحث عن القاسم المشترك الأكبر للأعداد : 1008 ؛ 1080 ؛ 3564

نحلل كل من هذه الأعداد إلى جداء عوامل أولية نجد : .

$1008 = 2^4 \times 3^3 \times 7$

$1080 = 2^3 \times 3^3 \times 5$

$3564 = 2^2 \times 3^4 \times 11$

القاسم المشترك الأكبر لهذه الأعداد هو جداء العوامل الأولية المشتركة للتحليلات الثلاثة ، بحيث كل عامل يؤخذ بأصغر أس .

أي أن :

ق م أ $(1008 ؛ 1080 ؛ 3564) = 2^2 \times 3^2$

$= 36$

3 ـ الأعداد الطبيعية الأولية فيما بينها .

ليكن أ = 340 ؛ ب = 273
لنحلل كلا من أ وَ ب
لدينا : $340 = 2^2 \times 5 \times 17$
$273 = 2 \times 7 \times 13$
لاحظ أن تحليلي أ وَ ب لا يشملان عوامل أولية مشتركة .
إذن لا توجد قواسم مشتركة لهذين العددين ما عدا العدد الطبيعي 1 الذي يقسم كل عدد طبيعي .
نقول إن العددين أ وَ ب أوليان فيما بينهما ونكتب : ق م أ (أ ؛ ب) = 1
ومنه التعريف التالي :

> أ ، ب عددان طبيعيان غير معدومين .
> نقول إن أ أولي مع ب إذا كان القاسم المشترك الأكبر لهما هو 1
> نقول أيضا إن أ وَ ب أوليان فيما بينهما .

مثال : لنبحث عن القاسم المشترك الأكبر للأعداد : 12 ؛ 18 ؛ 35
$12 = 2^2 \times 3$
$18 = 2 \times 3^2$
$35 = 5 \times 7$
ومنه : ق م أ (12 ؛ 35) = 1 فالعددان 12 ، 35 أوليان فيما بينهما .
أيضا : ق م أ (18 ؛ 35) = 1 فالعددان 18 ، 35 أوليان فيما بينهما .
أما : ق م أ (12 ؛ 18) = 2 ×3 = 6 فالعددان 12 ، 18 ليسا أوليين فيما بينهما .

4 ـ خواص القاسم المشترك الأكبر

خاصية 1 :

ليكن العددان الطبيعيان 36 وَ 45
لدينا من جهة : $36 = 2^2 \times 3^2$ ؛ $45 = 3^2 \times 5$
ومنه : ق م أ (36 ؛ 45) = 3^2 = 9

ومن جهة أخرى : $4 = 9 \div 36$
$5 = 9 \div 45$
لاحظ أن الحاصلين 4 وَ 5 أوليان فيما بينهما .
هذه النتيجة عامة ، ومنه الخاصية التالية :

خاصية 1 :

إذا قسمنا عددين طبيعيين غير معدومين على قاسمهما المشترك الأكبر فإننا نحصل على عددين طبيعيين أوليين فيما بينهما .

خاصية 2 :

ليكن العددان الطبيعيان 48 وَ 54
لدينا : $3 \times 2^4 = 48$ ؛ $3^3 \times 2 = 54$
إذن : ق م أ (48 ؛ 54) $= 2 \times 3 = 6$
تحقق أن :
ق$_{48}$ = { 1 ؛ 2 ؛ 3 ؛ 4 ؛ 6 ؛ 8 ؛ 12 ؛ 16 ؛ 24 ؛ 48 }
ق$_{54}$ = { 1 ؛ 2 ؛ 3 ؛ 6 ؛ 8 ؛ 9 ؛ 18 ؛ 27 ؛ 54 }
وأن القواسم المشتركة للعددين : 48 وَ 54 هي : 1 ؛ 2 ؛ 3 ؛ 6 .
ثم لاحظ أن هذه القواسم المشتركة للعددين 48 وَ 54 هي نفسها قواسم القاسم المشترك الأكبر للعددين 48 وَ 54 .

خاصية 2 :

مجموعة القواسم المشتركة لعدة أعداد طبيعية غير معدومة هي مجموعة قواسم القاسم المشترك الأكبر لهذه الأعداد .

3 . تطبيقات :

1 . الكسور المتكافئة :

. أ وَ ب عددان طبيعيان ، ب $\neq 0$

الرمز : $\frac{\text{أ}}{\text{ب}}$ يدل على كسر ، بسطه أ ومقامه ب .

العددان أ ، ب هما حدا الكسر $\frac{\text{أ}}{\text{ب}}$.

. نعلم أن قيمة الكسر $\frac{\text{أ}}{\text{ب}}$ لا تتغير بضرب حديه في عدد طبيعي غير معدوم .

أي أن : $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{أ} \times \text{ك}}{\text{ب} \times \text{ك}}$ حيث ك عدد طبيعي غير معدوم .

مثال 1 : $\frac{3}{5} = \frac{3 \times 2}{5 \times 2}$ (بوضع ك = 2) .

$= \frac{6}{10}$

أي : $\frac{3}{5} = \frac{6}{10}$. نقول إن الكسرين $\frac{3}{5}$ وَ $\frac{6}{10}$ متكافئان .

لاحظ أن : $3 \times 10 = 5 \times 6$

. نعلم أن قيمة الكسر $\frac{\text{أ}}{\text{ب}}$ لا تتغير أيضا بقسمة حديه على عدد طبيعي غير معدوم.

أي : $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{أ} \div \text{ك}}{\text{ب} \div \text{ك}}$ حيث ك قاسم مشترك للعددين أ وَ ب .

مثال 2 : $\dfrac{12}{15} = \dfrac{12 \div 3}{15 \div 3}$ (بوضع ك = 3)

$= \dfrac{4}{5}$

أي : $\dfrac{12}{15} = \dfrac{4}{5}$ ، فالكسران $\dfrac{12}{15}$ وَ $\dfrac{4}{5}$ متكافئان

لاحظ أن : $12 \times 5 = 15 \times 4$

مثال 3 :

لتكن الكسور : $\dfrac{1}{2}$ ؛ $\dfrac{3}{6}$ ؛ $\dfrac{5}{10}$.

10 6 2

لاحظ أن : $\dfrac{1}{2} = \dfrac{1 \times 3}{2 \times 3}$ وَ $\dfrac{1}{2} = \dfrac{1 \times 5}{2 \times 5}$

$= \dfrac{3}{6}$ $= \dfrac{5}{10}$

نقول إن الكسور $\dfrac{1}{2}$ وَ $\dfrac{3}{6}$ وَ $\dfrac{5}{10}$ متكافئة ونكتب : $\dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{6} = \dfrac{5}{10}$

لتكن الكسور : $\dfrac{15}{45}$ ؛ $\dfrac{3}{15}$ ؛ $\dfrac{1}{3}$.

لاحظ أن :

$\dfrac{15}{45} = \dfrac{15 \div 3}{45 \div 3}$ وَ $\dfrac{15}{45} = \dfrac{15 \div 15}{45 \div 15}$

$\frac{5}{15} =$ $\frac{1}{3} =$

إذن : $\frac{1}{3} = \frac{5}{15} = \frac{15}{45}$

ونقول إن الكسور : $\frac{1}{3}$ وَ $\frac{5}{15}$ وَ $\frac{15}{45}$ متكافئة

وبصفة عامة :

> يكون الكسران $\frac{أ}{ب}$ وَ $\frac{جـ}{د}$ متكافئين إذا وفقط إذا كان : أ × د = ب × جـ

2 - إختزال الكسور

ليكن الكسر $\frac{6}{9}$ ولنبحث عن كسر مكافئ له ، حداه أصغر من حدي $\frac{6}{9}$.

لاحظ أن العدد 3 هو قاسم مشترك للحدين 6 وَ 9 .

ومنه : $\frac{6}{9} = \frac{6 \div 3}{9 \div 3} = \frac{2}{3}$ (حسب قاعدة سابقة)

لاحظ أن الكسر $\frac{2}{3}$ مكافئ للكسر $\frac{6}{9}$ ، وحداه أصغر من حدي $\frac{6}{9}$

أي : $6 > 2$ وَ $9 > 3$

نقول إننا اختزلنا الكسر $\frac{6}{9}$

وبصفة عامة :

للحصول على كسر مختزل للكسر $\frac{أ}{ب}$ نقسم كلا من أ وَ ب على قاسم مشترك لهما .

مثال :

ليكن الكسر $\frac{24}{36}$.

لنبحث عن كسور مختزلة لهذا الكسر .

لاحظ أن : 2 ؛ 3 ؛ 4 هي قواسم مشتركة للعددين 24 ، 36 .

لدينا : $\frac{24}{36} = \frac{24 \div 2}{36 \div 2} = \frac{12}{18}$

$= \frac{24 \div 3}{36 \div 3} = \frac{8}{12}$

$= \frac{24 \div 4}{36 \div 4} = \frac{6}{9}$

فكل من : $\frac{12}{18}$ ؛ $\frac{8}{12}$ ؛ $\frac{6}{9}$ هو كسر مختزل للكسر $\frac{24}{36}$.

3 ـ الكسر غير القابل للإختزال :

تعريف

نقول عن كسر إنه غير قابل للإختزال إذا وفقط إذا كان حداه أوليين فيما بينهما .

مثال:

اختزل الكسر $\frac{24}{36}$ إلى أبسط شكل لدينا : ق م أ (24 ؛ 36) = 12

ومنه : $\frac{24}{36} = \frac{24 \div 12}{36 \div 12} = \frac{2}{3}$

2 ؛ 3 أوليان فيما بينهما ، فالكسر $\frac{2}{3}$ غير قابل للإختزال .

قاعدة

الحصول على الكسر غير القابل للاختزال المكافئ لكسر ، نقسم حدّي هذا الكسر على قاسمهما المشترك الأكبر .

في الحسابات على الأعداد الكسرية يفضل تعويض كل كسر بالكسر المكافئ له غير القابل للإختزال .

مثال:

لنختزل الكسر $\frac{720}{1800}$

تحقق أن : قَ م أ (720 ؛ 1800) = 360

وأن : $\frac{720}{1800} = \frac{720 \div 360}{1800 \div 360} = \frac{2}{5}$

$\frac{2}{5}$ هو الكسر المكافئ للكسر $\frac{720}{1800}$ غير القابل للإختزال .

4 . تمارين محلولة

تمرين 1

ن عدد طبيعي .
بقسمة كل عدد من الأعداد : 27 ؛ 40 ؛ 77 على ن نحصل على البواقي :
3 ؛ 4 ؛ 5 على الترتيب . عين أكبر قيمة للعدد ن .

الحل

. باقي قسمة 27 على ن هو 3 معناه :
يوجد عدد طبيعي $ك_1$ بحيث : 27 = ن × $ك_1$ + 3 ....(1)
. باقي قسمة 40 على ن هو 4 معناه :
يوجد عدد طبيعي $ك_2$ بحيث : 40 = ن × $ك_2$ + 4 ....(2)
. باقي قسمة 77 على ن هو 5 معناه :
يوجد عدد طبيعي $ك_3$ بحيث : 77 = ن × $ك_3$ + 5 ....(3)
إذن العدد الطبيعي ن يحقق في آن واحد المساويات الثلاث :

27 = ن × $ك_1$ + 3 ....(1)
40 = ن × $ك_2$ + 4 ....(2)
77 = ن × $ك_3$ + 5 ....(3)

لاحظ أنه يمكن كتابة هذه المساويات بالشكل :

27 − 3 = ن × $ك_1$
40 − 4 = ن × $ك_2$
77 − 5 = ن × $ك_3$

أي

24 = ن × $ك_1$ ....(1َ)
36 = ن × $ك_2$ ....(2َ)
72 = ن × $ك_3$ ....(3َ)

المساويات (1َ) وَ (2َ) وَ (3َ) تعني أن العدد ن هو قاسم مشترك للأعداد 24 وَ 36 وَ 72 .

فأكبر قيمة للعدد ن هي القاسم المشترك الأكبر للأعداد 24 وَ 36 وَ 72 .
فلنحسب ق م أ(24 ، 36 ، 72)

لدينا : $24 = 2^3 \times 3$
$36 = 2^2 \times 3^2$
$72 = 2^3 \times 3^2$

ومنه : ق م أ (24 ، 36 ، 72) = $2^2 \times 3 = 12$

إذن أكبر قيمة للعدد ن هي 12 .

تمرين 2

اختزل الكسر $\frac{72}{90}$ إلى أبسط شكل . ثم عين الكسر $\frac{\text{أ}}{\text{ب}}$ المكافئ له بحيث يكون : 3 أ + 5 ب = 74

الحل

لنختزل الكسر $\frac{72}{90}$: لدينا $72 = 2^3 \times 3^2$ $90 = 2 \times 3^2 \times 5$

و ق م أ (72 ، 90) = $2 \times 3^2 = 18$

ومنه : $\frac{72}{90} = \frac{72 \div 18}{90 \div 18} = \frac{4}{5}$

. الكسر $\frac{4}{5}$ غير قابل للإختزال ، وبالتالي فالكسر المطلوب $\frac{\text{أ}}{\text{ب}}$ هو من الشكل :

$\frac{4 \times \text{ك}}{5 \times \text{ك}}$ ، والبحث عن أ وَ ب يؤول إلى البحث عن العدد الطبيعي ك الذي يحقق

المساواة : 3 أ + 5 ب = 74 بحيث : أ = 4 ك وَ ب = 5 ك

أي : 3 (4 ك) + 5 (5 ك) = 74

أو : 12 ك + 25 ك = 74

37 ك = 74 ومنه : ك = 2

وبالتالي الكسر $\frac{\text{أ}}{\text{ب}}$ المطلوب هو : $\frac{4 \times 2}{5 \times 2}$ أي $\frac{8}{10}$

تمارين

القاسم المشترك الأكبر

1 أ ، ب عددان طبيعيان بحيث : أ = 75 ، ب = 525
عين ق م أ (أ ، ب) ؛ ثم عيّن القواسم المشتركة لهذين العددين .

2 أعد نفس السؤال إذا كان :
أ = 345 وَ ب = 540
أ = 104×4 وَ ب = 5×32

3 حلل كلا من أ ، ب إلى جداء عوامل أولية ، ثم عيّن :
. ق القاسم المشترك الأكبر للعددين أ وَ ب .
. أَ وَ بَ حاصلي قسمة كل من أ وَ ب على ق .
. القاسم المشترك الأكبر للعددين : أَ وَ بَ. ماذا تستنتج ؟ .
وذلك من أجل كل من الحالات التالية :
أ = 75×24 وَ ب = 625×36
أ = 144×2^3 وَ ب = 32×9
أ = 54×27 وَ ب = 30×162

4 يتكون مخيم كشفي من 315 كشافا وَ 42 ممرنا .
ما هو أكبر عدد من الأفواج التي يمكن تشكيلها بحيث تشمل نفس العدد من الكشافين من جهة ولها نفس العدد من الممرنين من جهة أخرى .

الأعداد الطبيعية الأولية فيما بينها

5 هل أ وَ ب أوليان فيما بينهما في كل حالة من الحالات التالية ؟
أ = 15×221 وَ ب = 49×81
أ = 1080 وَ ب = 7423

6 لتكن الأعداد :

أ = $2^4 \times 25 \times 35$ ؛ ب = 55 ؛ جـ = 36

بين فيما إذا كانت هذه الأعداد أولية فيما بينهما مثنى مثنى .

اختزال الكسور:

7 اختزل الكسور التالية حتى تحصل على الكسور غير القابلة للإختزال :

$\frac{33 \times 5^2 \times 2^3}{75 \times 16}$ ؛ $\frac{17 \times 2^5}{44 \times 34}$.

$\frac{328}{1044}$ ؛ $\frac{3500}{490}$ ؛ $\frac{49 \times 25 \times 3^4}{21 \times 35 \times 81}$.

8 اختزل الكسور التالية حتى تحصل على الكسور غير القابلة للإختزال :

$\frac{726}{544}$ ؛ $\frac{35 \times 9}{49 \times 3^4}$ ؛ $\frac{14 \times 6^3 \times 4^2}{9^2 \times 8^3}$.

$\frac{45 \times 9^3 \times 16^2}{10^2 \times 6^3}$ ؛ $\frac{25^2 \times 144}{18^2 \times 45}$.

الكسور المتكافئة :

9 عين الكسر $\frac{أ}{ب}$ المكافئ للكسر $\frac{65}{104}$ بحيث يكون : أ + ب = 1573

10 عين الكسر $\frac{أ}{ب}$ المكافئ للكسر $\frac{72}{90}$ بحيث يكون : ب – أ = 13

3 المضاعف المشترك الأصغر

1. أنشطة تمهيدية

نشاط 1 :

. تعلم أن مضاعفات عدد طبيعي أ هي من الشكل :
أ × ك حيث ك ∈ { 0 ؛ 1 ؛ 2 ؛ 3 ؛ ... ؛ ن ؛ ... }

. عين بعض المضاعفات للعدد 12 .

. هل يمكن تعيين أكبر مضاعف للعدد 12 ؟ لماذا ؟

. ماذا تستنتج بخصوص عدد مضاعفات عدد طبيعي ؟ .

نشاط 2 :

. عين مضاعفات كل من 8 و 12 التي هي أصغر من 100

. استنتج المضاعفات المشتركة للعددين 8 و 12 .

. ما هو أصغر مضاعف مشترك غير معدوم لهما ؟ .

2 ـ المضاعف المشترك الأصغر لعددين طبيعيين

ليكن العددان الطبيعيان :

أ = $2^2 \times 3 \times 5$ ؛ ب = $2^3 \times 3 \times 7$

ولنبحث عن مضاعف مشترك لهما :

تحليل كل مضاعف للعدد أ يشمل

. العامل 2 مرتين على الأقل

. العامل 3 مرة على الأقل

. العامل 5 مرة على الأقل

تحليل كل مضاعف للعدد ب يشمل :

. العامل 2 ثلاث مرات على الأقل

. العامل 3 مرة واحدة على الأقل

. العامل 7 مرة واحدة على الأقل

نستنتج مما سبق أن كل مضاعف مشترك للعددين أ وَ ب يشمل :

. العامل 2 ثلاث مرات على الأقل

. العامل 3 مرة واحدة على الأقل

. العامل 5 مرة واحدة على الأقل

. العامل 7 مرة واحدة على الأقل

ويمكن يشمل عوامل أولية أخرى

هذا يعني أن تحليل كل مضاعف مشترك للعددين أ وَ ب يشمل على الأقل العوامل الأولية 2 ؛ 2 ؛ 2 ؛ 3 ؛ 5 ؛ 7 .

فالعدد : $2^3 \times 3 \times 5 \times 7$ هو أصغر مضاعف مشترك للعددين أ وَ ب ويسمى المضاعف المشترك الأصغر للعددين أ وَ ب ونكتب :

م م أ (أ ؛ ب) = $2^3 \times 3 \times 5 \times 7$

وبصفة عامة :

للبحث عن المضاعف المشترك الأصغر لعددين طبيعيين نستعمل القاعدة التالية :

للحصول على المضاعف المشترك الأصغر لعددين طبيعيين :

. نحلل كلا من العددين إلى جداء عوامل أولية .

. نحسب جداء العوامل المشتركة وغير المشتركة في هذين التحليلين بحيث تأخذ كل عامل بأكبر أس .

مثال 1 : لنبحث عن المضاعف المشترك الأصغر للعددين : 132 ، 240

لدينا : 132 = $2^2 \times 3 \times 11$

لدينا : 240 = $2^4 \times 3 \times 5$

ومنه : م م أ (132 ، 240) = $7 \times 5 \times 3 \times 2^4$
$= 2640$

مثال 2 : لنبحث عن المضاعف المشترك الأصغر للعددين : 48 ، 240

لدينا : $48 = 3 \times 2^4$

$240 = 5 \times 3 \times 2^4$

ومنه : م م أ (132 ، 240) = $5 \times 3 \times 2^4$
$= 240$

2 ـ المضاعف المشترك الأصغر لعدة أعداد طبيعية .

لتعيين المضاعف المشترك الأصغر لعدة أعداد طبيعية كل منها أكبر من 1 نستعمل القاعدة السابقة .

مثال: لنبحث عن المضاعف المشترك الأصغر للأعداد الطبيعية :

144 ؛ 234 ؛ 1080

. بتحلل كل من هذه الأعداد إلى جداء عوامل أولية نجد :

$144 = 3^2 \times 2^4$

$234 = 3^4 \times 2^2$

$1080 = 5 \times 3^3 \times 2^3$

فالمضاعف المشترك الأصغر لهذه الأعداد هو جداء العوامل الأولية المشتركة وغير المشتركة للتحليلات الثلاثة ، بحيث نأخذ كل عامل بأكبر أس .

أي أن :

م م أ (144 ؛ 234 ؛ 1080) = $5 \times 3^4 \times 2^4 = 6480$

3 ـ خاصية

لنعتبر العددين الطبيعيين 15 وَ 18 و لنبحث عن تحليل مضاعف مشترك لهما .

لدينا : $15 = 3 \times 5$ ؛ $18 = 3^2 \times 2$

نعلم أن كل مضاعف مشترك للعددين 15 وَ 18 يشمل :

. العامل 2 مرة واحدة على الأقل
. العامل 3 مرتين على الأقل
. العامل 5 مرة على الأقل

ويمكن أن يشمل عوامل أولية أخرى
فكل مضاعف مشترك للعددين 15 وَ 18 هو عدد ل من الشكل :

ل = $2 \times 3^3 \times 5 \times$ ك حيث ك عدد طبيعي .

أي : ل = م م أ (15 ؛ 18) × ك

هذه المساواة تعني أن كل مضاعف مشترك للعددين 15 وَ 18 هو مضاعف للمضاعف المشترك الأصغر لهذين العددين .

وبصفة عامة لدينا:

خاصية :

المضاعفات المشتركة لعددين طبيعيين هي مضاعفات مضاعفهما المشترك الأصغر .

3 - تطبيقات

توحيد المقامات

لنبحث عن كسرين مكافئين ، على الترتيب ، للكسرين $\frac{5}{6}$ وَ $\frac{3}{8}$ بحيث يكون لهما أصغر مقام مشترك .

المقام المشترك الأصغر المطلوب هو المضاعف المشترك الأصغر للمقامين 6 ؛8 وهو العدد 24 .

لدينا : من جهة : $24 = 6 \times 4$

ومن جهة أخرى : $24 = 8 \times 3$

إذن : $\frac{5}{6} = \frac{5 \times 4}{6 \times 4} = \frac{20}{24}$ وَ $\frac{3}{8} = \frac{3 \times 3}{8 \times 3} = \frac{9}{24}$

الكسران : $\frac{20}{24}$ وَ $\frac{9}{24}$ هما كسران مكافئان على الترتيب للكسرين $\frac{5}{6}$ و $\frac{3}{8}$

نقول إننا وحدنا مقامي الكسرين : $\frac{5}{6}$ وَ $\frac{3}{8}$

القاعدة :

> لتوحيد مقامات عدة كسور :
> . نبحث عن المضاعف المشترك الأصغر لمقامات هذه الكسور .
> . نبحث عن الكسور المكافئة للكسور المفروضة التي مقام كل منها هو المضاعف المشترك الأصغر المحصل عليه سابقا .

مثال :

لنوحد مقامات الكسور : $\frac{3}{8}$ ، $\frac{5}{4}$ ، $\frac{7}{6}$

لدينا : $8 = 2^3$ ، $4 = 2^2$ ، $6 = 3 \times 2$

إذن : م م أ (8 ، 4 ، 6) $= 2^3 \times 3 = 24$

ومنه : $\frac{3}{8} = \frac{3 \times 3}{3 \times 8} = \frac{9}{24}$ ؛ $\frac{5}{4} = \frac{6 \times 5}{6 \times 4} = \frac{30}{24}$ ؛ $\frac{7}{6} = \frac{4 \times 7}{4 \times 6} = \frac{28}{24}$

الكسور $\frac{9}{24}$ ، $\frac{30}{24}$ ، $\frac{28}{24}$ لها نفس المقام وهي مكافئة على الترتيب للكسور $\frac{3}{8}$ ، $\frac{5}{4}$ ، $\frac{7}{6}$

4 تمـاريـن مـحـلـولـة

تمرين 1

لتكن الكسور : $\frac{2}{15}$ ، $\frac{5}{9}$ ، $\frac{7}{63}$

وحد مقامات هذه الكسور بحيث يكون لها أصغر مقام مشترك .

الحل

أصغر مقام مشترك لهذه الكسور هو : م م أ (15 ، 9 ، 63)

لدينا : $15 = 3 \times 5$

$9 = 3^2$

$63 = 3^2 \times 7$

ومنه : م م أ (15 ؛ 9 ؛ 15) = $(63 = 3^2 \times 5 \times 7 = 315$

لنبحث عن الكسور المكافئة لهذه الكسور بحيث يكون مقامها المشترك الأصغر هو العدد

315 لدينا :

$$\frac{2}{15} = \frac{(7 \times 3) \times 2}{(7 \times 3) \times 15} = \frac{42}{315}$$

$$\frac{5}{9} = \frac{(7 \times 5) \times 5}{(7 \times 5) \times 9} = \frac{175}{315}$$

$$\frac{7}{63} = \frac{5 \times 7}{5 \times 63} = \frac{35}{315}$$

هكذا نحصل على الكسور : $\frac{42}{315}$ ، $\frac{175}{315}$ ، $\frac{35}{315}$ التي لها نفس المقام

والمكافئة على التوالي لكل من : $\frac{2}{15}$ وَ $\frac{5}{9}$ وَ $\frac{7}{63}$.

تمرين 2

عدد تلاميذ مدرسة محصور بين 700 وَ 1000 . إذا وزع هؤلاء التلاميذ إلى أفواج تربوية تضم إما 36 تلميذا وإما 40 تلميذا فلا يبقى أي تلميذ دون فوج .
ما هو عدد التلاميذ ؟ .

الحل

ليكن ن عدد التلاميذ بحيث : 700 < ن < 1000 ، بما أنه عند تفويج التلاميذ في الحالتين لا يبقى أي تلميذ بدون فوج فإن هذا يعني أن ن مضاعف مشترك لكل من 36 وَ 40 . فكل مضاعف مشترك للعددين 36 وَ 40 هو مضاعف لمضاعفهما المشترك الأصغر م م أ (36 ، 40) .

لدينا :

$36 = 2^2 \times 3^2$ وَ $40 = 2^3 \times 5$

ومنه : م م أ (36 ، 40) $= 2^3 \times 3^2 \times 5 = 360$

العدد ن مضاعف للعدد 360 أي : ن = 360 ك حيث ك عدد طبيعي .

بما أن : 700 < ن < 1000 وَ ن = 360 ك

فإن : 700 < 360 ك < 1000

أي : $\frac{700}{360}$ < ك < $\frac{1000}{360}$

أي : 1,9 < ك < 2,7

فالعدد الطبيعي المحصور بين 1,9 وَ 2,7 هو العدد 2 أي : ك = 2

ومنه : ن = 360×2

ن = 720 .

تمارين

المضاعف المشترك الأصغر

1 أوجد المضاعف المشترك الأصغر للعددين أ ؛ ب ، ثم عين المضاعفات المشتركة للعددين أ وَ ب والتي كل منها أصغر من 1500 ، في كل من الحالتين التاليتين :

أ = 128 وَ ب = 34

أ = 45 وَ ب = 12 .

2 نفس الأسئلة إذا كان :

أ = 38 وَ ب = 180

أ = 35 وَ ب = 12 .

3 م هو المضاعف المشترك الأصغر للعددين أ ، ب .
عين القيم الممكنة للعدد ب علما بأن :

أ = $2^{3} \times 3^{2}$ م = $2^{4} \times 3^{5} \times 5^{2}$

4 عين كلا من القاسم المشترك الأكبر ق ، والمضاعف المشترك الأصغر م للعددين أ ، ب . ثم قارن الجداء ين : ق × م وَ أ × ب في كل من الحالتين التاليتين :

أ = 24 × 156 وَ ب = 28 × 56

أ = $2^{4} \times 35$ وَ ب 27 × 135

توحيد المقامات

5 وحد مقامات الكسور التالية :

$\frac{55}{66}$ وَ $\frac{63}{84}$.

$\frac{5}{9}$ وَ $\frac{2}{15}$ وَ $\frac{7}{65}$.

6 وحد مقامات الكسور التالية :

$\frac{25}{75}$ وَ $\frac{48}{72}$ وَ $\frac{24}{108}$.

$\frac{13 \times 3 \times 4}{7 \times 3 \times 2^2}$ وَ $\frac{14 \times 25}{70 \times 6}$ وَ $\frac{5 \times 12 \times 14}{63 \times 56}$.

4 الأعداد الكسرية و العمليات عليها

1 . نشاط تمهيدي

ليكن الكسران : $\frac{14}{36}$ وَ $\frac{15}{90}$

- اختزل كلا من هذين الكسرين
- وحّد مقامي الكسرين المختزلين
- أحسب المجموع : $\frac{14}{36} + \frac{15}{90}$
- أحسب الفرق : $\frac{14}{36} - \frac{15}{90}$
- أحسب الجداء : $\frac{14}{36} \times \frac{15}{90}$
- أحسب حاصل القسمة : $\frac{14}{36} \div \frac{15}{90}$

2 . الكسور والأعداد الكسرية

1) الأعداد الكسرية

لدينا : $\frac{1}{2} = \frac{2 \times 1}{2 \times 2} = \frac{2}{4}$

$= \frac{3 \times 1}{3 \times 2} = \frac{3}{6}$

$= \frac{4 \times 1}{4 \times 2} = \frac{4}{8}$

الكسور : $\frac{1}{2}$ ؛ $\frac{2}{4}$ ؛ $\frac{3}{6}$ ؛ $\frac{4}{8}$ هي كسور متكافئة

هذه الكسور تمثل عددا يسمى **عددا كسريا** ونكتب .

$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8}$

وأبسط ممثل له هو الكسر غير القابل للإختزال : $\frac{1}{2}$.

- لتسهيل القراءة والكتابة نعبر تجاوزا من الآن فصاعدا عن العدد الكسري الذي ممثله $\frac{\text{أ}}{\text{ب}}$ " بالكسر $\frac{\text{أ}}{\text{ب}}$ "

- كل عدد طبيعي ن يعتبر عددا كسريا ممثلا بالكسر $\frac{\text{ن}}{1}$

مثلا :

$$\frac{0}{1} = 0 \quad ؛ \quad \frac{1}{1} = 1 \quad ؛ \quad \frac{2}{1} = 2$$

- الكتابة : أ/ب = جـ/د تعني :

الكسران : أ/ب وَ جـ/د متكافئان .

والعددان الكسريان أ/ب وَ جـ/د متساويان .

2) الأعداد العشرية

- **الكسر العشري** :

تعريف

> الكسر العشري هو كسر مقامه قوة للعدد 10

مثال :

- كل من $\frac{25}{10}$ وَ $\frac{43}{100}$ وَ $\frac{27}{1000}$ هو كسر عشري .
- كل من $\frac{1}{3}$ وَ $\frac{5}{7}$ هو كسر غير عشري لأنه لا يمكن كتابة كل من 3 وَ 7 كقوة للعدد 10 .

- **العدد العشري**

تعريف:

العدد العشري هو عدد كسري يمكن تمثيله بكسر عشري . أي هو عدد كسري مقامه من الشكل : $2^{ن} \times 5^{هـ}$ حيث : ن ؛ هـ عددان طبيعيان .

مثال 1 : الكسور العشرية : $\frac{17}{10}$ ؛ $\frac{21}{100}$ ؛ $\frac{19}{1000}$ تمثل أعدادا عشرية .

مثال 2 : كل من : $\frac{1}{2}$ ؛ 1 ؛ 2 ؛ $\frac{3}{5}$ ؛ $\frac{7}{5 \times 2}$ ؛ $\frac{3}{5 \times 2^2}$ ؛ $\frac{9}{5^2 \times 2^3}$ هو عدد عشري .

كل من : $\frac{1}{3}$ ؛ $\frac{4}{15}$ ؛ $\frac{5}{7}$ ؛ $\frac{16}{30}$ هو عدد غير عشري .

3) مقارنة الأعداد الكسرية

نذكر فيما يلي بالخواص التالية :

$\frac{أ}{ب}$ و $\frac{جـ}{د}$ عددان كسريان

- $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د}$ معناه : $أ \times د = ب \times جـ$
- $\frac{أ}{ب} > \frac{جـ}{د}$ معناه : $أ \times د > ب \times جـ$
- $\frac{أ}{ب} < \frac{جـ}{د}$ معناه : $أ \times د < ب \times جـ$

مثال :

لنقارن بين الأعداد الكسرية :

$\frac{5}{2}$ ؛ $\frac{3}{4}$ ؛ $\frac{15}{6}$ ؛ $\frac{8}{7}$

لدينا : $\frac{5}{2} = \frac{15}{6}$ لأن : $5 \times 6 = 2 \times 15$

$\frac{5}{2} > \frac{3}{4}$ لأن : $5 \times 4 > 2 \times 3$

$\frac{3}{4} < \frac{8}{7}$ لأن : $3 \times 7 < 4 \times 8$

3 . جمع الأعداد الكسرية

أ) مجموع كسرين

قاعدة

لحساب مجموع الكسرين $\frac{أ}{ب}$ و $\frac{جـ}{د}$ نوحد مقاميهما ثم نجمع بسطي الكسرين الناتجين أي :

$$\frac{أ}{ب} + \frac{جـ}{د} = \frac{أ د + ب جـ}{ب د}$$

- وعمليا نختار أصغر مقام موحد للكسرين وهو : م م أ لمقاميهما .

مثال 1 :

لنحسب المجموع : $\frac{3}{7} + \frac{5}{7}$

$\frac{3}{7}$ وَ $\frac{5}{7}$ لهما نفس المقام إذن :

$$\frac{8}{7} = \frac{5+3}{7} = \frac{5}{7} + \frac{3}{7}$$

مثال 2::

لنحسب المجموع : $\frac{5}{12} + \frac{13}{8}$

نوحد مقامي الكسرين $\frac{5}{12}$ وَ $\frac{13}{8}$

لدينا : $12 = 3 \times 2^2$ وَ $2^2 = 8$

إذن : م م أ $(12 ؛ 8) = 3 \times 2^3 = 24$

ومنه : $\frac{5}{12} + \frac{13}{8} = \frac{2 \times 5}{2 \times 12} + \frac{3 \times 13}{3 \times 8}$

$$= \frac{39}{24} + \frac{10}{24}$$

$$= \frac{39 + 10}{24}$$

$$= \frac{49}{24}$$

2) خواص جمع الأعداد الكسرية

- نذكر فيما يلي بالخواص التالية :

مهما كانت الكسور : $\frac{أ}{ب}$ ؛ $\frac{ج}{د}$ ؛ $\frac{هـ}{ي}$ فإن :

- $\frac{أ}{ب} + \frac{ج}{د} = \frac{ج}{د} + \frac{أ}{ب}$ (التبديل)

- $\left(\frac{أ}{ب} + \frac{ج}{د}\right) + \frac{هـ}{ي} = \frac{أ}{ب} + \left(\frac{ج}{د} + \frac{هـ}{ي}\right)$ (التجميع)

- $\frac{أ}{ب} + 0 = \frac{أ}{ب}$ (العدد 0 عنصر حيادي بالنسبة إلى الجمع)

مثال :

لنحسب المجموع : $\frac{3}{2} + 4 + \frac{5}{3} + 6$

لدينا : $\frac{3}{2} + 4 + \frac{5}{3} + 6 = \left(\frac{3}{2} + \frac{5}{3}\right) + (4 + 6)$ (تبديل وتجميع)

$= \left(\frac{3}{2} + \frac{5}{3}\right) + 10$

$= \left(\frac{3 \times 3}{3 \times 2} + \frac{2 \times 5}{2 \times 3}\right) + 10$

$= \left(\frac{9}{6} + \frac{10}{6}\right) + 10$

$$\frac{10}{1} + \frac{19}{6} =$$

$$\frac{6 \times 10}{6 \times 1} + \frac{19}{6} =$$

$$\frac{60 + 19}{6} =$$

$$\frac{79}{6} =$$

4 . طرح الأعداد الكسرية

1) فرق كسرين

قاعدة

لحساب فرق الكسرين $\frac{\text{أ}}{\text{ب}}$ وَ $\frac{\text{جـ}}{\text{د}}$ حيث : $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} \geq \frac{\text{جـ}}{\text{د}}$

نوحد مقاميهما ثم نحسب فرق بسطي الكسرين الناتجين أي :

$$\frac{\text{أ}}{\text{ب}} - \frac{\text{جـ}}{\text{د}} = \frac{\text{أ د} - \text{ب جـ}}{\text{ب د}}$$

- عمليا نختار أصغر مقام موحد الكسرين وهو : م م أ لمقاميهما .

مثال 1 :

لنحسب الفرق : $\frac{11}{6} - \frac{18}{16}$

اختزال الكسر $\frac{18}{16}$ ؛ $\frac{18}{16} = \frac{9}{8}$

إذن : $\frac{11}{6} - \frac{18}{16} = \frac{11}{6} - \frac{9}{8}$

توحيد المقامين : 6 و 8 ،

$6 = 2 \times 3$ و $8 = 2^3$

فأصغر مقام موحد للكسرين هو م م أ (6 ؛ 8) أي : $2^3 \times 3 = 24$

وبالتالي : $\frac{11}{6} - \frac{18}{16} = \frac{11}{6} - \frac{9}{8}$

$= \frac{4 \times 11}{4 \times 6} - \frac{3 \times 9}{3 \times 8}$

$= \frac{44}{24} - \frac{27}{24}$

$= \frac{44 - 27}{24}$

$= \frac{17}{24}$

مثال 2: لنحسب الفرق : $\frac{10}{3} - 2$

لدينا : $\frac{10}{3} - 2 = \frac{10}{3} - \frac{2}{1}$

توحيد مقامي الكسرين : $\frac{10}{3}$ و $\frac{2}{1}$

أصغر مقام موحد هو 3 وبالتالي :

$$\frac{10}{3} - 2 = \frac{10}{3} - \frac{3 \times 2}{3 \times 1}$$

$$= \frac{10}{3} - \frac{6}{3}$$

$$= \frac{4}{3}$$

ملاحظة :

طرح الأعداد الكسرية غير تبديلي وغير تجميعي .

5 . ضرب الأعداد الكسرية

1) جداء كسرين

قاعدة

لحساب جداء الكسرين $\frac{أ}{ب}$ وَ $\frac{جـ}{د}$ نضرب البسطين في بعضهما والمقامين في بعضهما أي :

$$\frac{أ}{ب} \times \frac{جـ}{د} = \frac{أ\,جـ}{ب\,د}$$

مثال 1 :

لنحسب الجداء : $\frac{7}{9} \times \frac{11}{5}$

لدينا : $\frac{7}{9} \times \frac{11}{5} = \frac{7 \times 11}{9 \times 5} = \frac{77}{45}$

مثال 2 :

لنحسب الجداء : $\frac{5}{9} \times \frac{6}{8}$

لدينا : $\frac{5}{9} \times \frac{6}{8} = \frac{5}{9} \times \frac{3}{4}$ (اختزال الكسر $\frac{6}{8}$)

$= \frac{3 \times 5}{4 \times 9}$

$= \frac{3 \times 5}{2^2 \times 3^2}$ (تحليل المقام)

$= \frac{3 \times 5}{3 \times (3 \times 2^2)}$

$= \frac{5}{3 \times 2^2}$ (اختزال الكسر)

$= \frac{5}{12}$

2) خواص ضرب الأعداد الكسرية

نذكر فيما يلي بالخواص التالية :

مهما كانت الكسور $\frac{أ}{ب}$ ، $\frac{جـ}{د}$ ، $\frac{هـ}{ي}$ فإن :

- $\frac{أ}{ب} \times \frac{جـ}{د} = \frac{جـ}{د} \times \frac{أ}{ب}$ (الضرب تبديلي)

- $\left(\frac{\text{أ}}{\text{ب}} \times \frac{\text{جـ}}{\text{د}}\right) \times \frac{\text{هـ}}{\text{ي}} = \frac{\text{أ}}{\text{ب}} \times \left(\frac{\text{جـ}}{\text{د}} \times \frac{\text{هـ}}{\text{ي}}\right)$ (الضرب تجميعي)

- $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} \times 1 = \frac{\text{أ}}{\text{ب}}$ (العنصر 1 حيادي بالنسبة إلى الضرب)

- $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} \times \left(\frac{\text{جـ}}{\text{د}} + \frac{\text{هـ}}{\text{ي}}\right) = \frac{\text{أجـ}}{\text{بد}} + \frac{\text{أهـ}}{\text{بي}}$ (الضرب توزيعي بالنسبة إلى الجمع)

- $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} \times \left(\frac{\text{جـ}}{\text{د}} - \frac{\text{هـ}}{\text{ي}}\right) = \frac{\text{أجـ}}{\text{بد}} - \frac{\text{أهـ}}{\text{بي}}$ (الضرب توزيعي بالنسبة إلى الطرح)

- $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} \times 0 = 0$

أمثلة :

- $\frac{3}{5} \times 1 = \frac{3}{5} \times \frac{1}{1}$

  $= \frac{3 \times 1}{5 \times 1}$

  $= \frac{3}{5}$

- $\frac{1}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \left(\frac{1}{4} \times \frac{1}{2}\right) \times \frac{1}{3}$ (تجميع $\frac{1}{4}$ وَ $\frac{1}{2}$)

$$\frac{1}{3} \times \frac{1 \times 1}{2 \times 4} =$$

$$\frac{1}{3} \times \frac{1}{8} =$$

$$\frac{1}{24} =$$

• $\frac{1}{5} \times (\frac{1}{2} + \frac{1}{3}) = \frac{1}{5} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{5} \times \frac{1}{3}$ (بالتوزيع)

$$\frac{1 \times 1}{2 \times 5} + \frac{1 \times 1}{3 \times 5} =$$

$$\frac{1}{10} + \frac{1}{15} =$$

$$\frac{3 \times 1}{3 \times 10} + \frac{2 \times 1}{2 \times 15} =$$

$$\frac{3}{30} + \frac{2}{30} =$$

$$\frac{2 + 3}{30} =$$

$$\frac{5}{30} =$$

$$\frac{1}{6} =$$

6 . قسمة الأعداد الكسرية

حاصل قسمة كسرين

قاعدة

لقسمة الكسر $\frac{\text{أ}}{\text{ب}}$ على الكسر غير المعدوم $\frac{\text{جـ}}{\text{د}}$ نضرب الكسر $\frac{\text{أ}}{\text{ب}}$ في مقلوب الكسر $\frac{\text{جـ}}{\text{د}}$.

أي : $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} \div \frac{\text{جـ}}{\text{د}} = \frac{\text{أ}}{\text{ب}} \times \frac{\text{د}}{\text{جـ}}$

مثال 1 : لنقسم الكسر $\frac{3}{7}$ على الكسر $\frac{2}{5}$

لدينا : $\frac{3}{7} \div \frac{2}{5} = \frac{3}{7} \times \frac{5}{2}$

$= \frac{5 \times 3}{2 \times 7}$

$= \frac{15}{14}$

مثال 2 :
لنقسم $\frac{10}{21}$ على $\frac{15}{14}$

لدينا : $\frac{10}{21} \div \frac{15}{14} = \frac{10}{21} \times \frac{14}{15}$

$$= \frac{14 \times 10}{15 \times 21}$$

$$= \frac{(7 \times 2)(5 \times 2)}{(5 \times 3)(7 \times 3)}$$

$$= \frac{(7 \times 5) \times 2^2}{(5 \times 3)(7 \times 3)}$$

$$= \frac{(7 \times 5) \times 2^2}{(5 \times 7) \times 3^2}$$

$$= \frac{2^2}{3^2}$$

$$= \frac{4}{9}$$

7 - تـطـبـيـقـات

1) مجموع عدّة أعداد كسرية

لنحسب المجموع : $\frac{12}{15} + \frac{3}{5} + \frac{4}{10}$

لدينا : $\frac{12}{15} + \frac{3}{5} + \frac{4}{10} = \frac{3 \times 4}{3 \times 5} + \frac{3}{5} + \frac{2 \times 2}{2 \times 5}$ (تحليل)

$$\frac{2}{5}+\frac{3}{5}+\frac{4}{5}=\frac{4}{10}+\frac{3}{5}+\frac{12}{15}$$ (اختزال)

$$\frac{2}{5}+\left(\frac{3}{5}+\frac{4}{5}\right)=$$ (تجميع)

$$\frac{2}{5}+\frac{3+4}{5}=$$ (جمع كسرين)

$$\frac{2}{5}+\frac{7}{5}=$$ (جمع كسرين)

$$\frac{9}{5}=$$

وبصفة عامة :

قاعدة

لإيجاد مجموع عدة أعداد كسرية :

- نختزل الكسور الممثلة لها إن أمكن .
- نوحّد مقامات الكسور المختزلة .
- نحتفظ بالمقام المشترك ونجمع بسوط الكسور الناتجة .

2) جداء عدة أعداد كسرية

لنحسب الجداء : $\frac{3}{8}\times\frac{4}{9}\times\frac{6}{15}$

لدينا : $\frac{3}{8}\times\frac{4}{9}\times\frac{6}{15}=\left(\frac{3}{8}\times\frac{4}{9}\right)\times\frac{6}{15}$ (الضرب تجميعي)

$$\frac{4\times 3}{9\times 8}\times\frac{6}{15}=$$

$$= \frac{6 \times 4 \times 3}{15 \times 9 \times 8}$$

$$= \frac{3^2 \times 2^3}{5 \times 3^3 \times 2^3}$$ (تحليل)

$$= \frac{1}{5 \times 3}$$

$$= \frac{1}{15}$$

وبصفة عامة :

قاعدة

جداء عدة أعداد كسرية هو عدد كسري بسطه جداء بسوط الكسور الممثلة لها ومقامه جداء مقاماتها .

3) ضرب عدد كسري بعدد طبيعي

لنحسب الجداء : $\frac{4}{25} \times 9$

لدينا : $\frac{4}{25} \times 9 = \frac{4}{25} \times \frac{9}{1}$ $\left(\frac{9}{1} = 9\right)$

$$= \frac{9 \times 4}{1 \times 25}$$

$$= \frac{36}{25}$$

وبصفة عامة :

$$\frac{أ}{ب} \times جـ = \frac{أ \times جـ}{ب}$$

4) قسمة عدد كسري على عدد طبيعي

لنحسب حاصل القسمة : $\frac{12}{11} \div 4$

لدينا : $\frac{12}{11} \div 4 = \frac{12}{11} \div \frac{4}{1}$

$= \frac{12}{11} \times \frac{1}{4}$ (قسمة كسر على آخر)

$= \frac{12 \times 1}{11 \times 4}$

$= \frac{12}{44}$

$= \frac{3 \times 4}{11 \times 4}$

$= \frac{3}{11}$ (اختزال)

وبصفة عامة :

$$\frac{أ}{ب} \div جـ = \frac{أ}{ب\ جـ}$$

8 - تمارين محلولة

تمرين 1

أحسب العدد الكسري ك حيث : ك = $\frac{17}{45} + \frac{5}{6} - \frac{3}{5}$

الحل

لحساب ك نجري العمليات حسب ترتيبها ، أي نجمع $\frac{17}{45}$ وَ $\frac{5}{6}$ ثم نطرح $\frac{3}{5}$ من الناتج .

فيكون : ك = $\left(\frac{17}{45} + \frac{5}{6}\right) - \frac{3}{5}$ (توحيد مقامي الكسرين $\frac{17}{45}$ وَ $\frac{5}{6}$)

$= \left(\frac{34}{90} + \frac{75}{90}\right) - \frac{3}{5}$

$= \frac{109}{90} - \frac{3}{5}$

$= \frac{109}{90} - \frac{18 \times 3}{18 \times 5}$ (توحيد مقامي الكسرين $\frac{109}{90}$ وَ $\frac{3}{5}$)

$= \frac{109}{90} - \frac{54}{90}$

$= \frac{109 - 54}{90}$

$= \frac{55}{90}$

$$= \frac{5 \times 11}{90}$$

$$= \frac{11}{18}$$ (الكسر $\frac{11}{18}$ غير قابل للإختزال)

إذن : ك = $\frac{11}{18}$

تمرين 2

صرف شخص $\frac{1}{20}$ وَ $\frac{1}{4}$ وَ $\frac{1}{12}$ من ماله .

1) عين الكسر الذي يمثل هذه المصاريف .

2) ما هو الكسر الذي يمثل الباقي من المال ؟

3) إذا كان المبلغ الباقي هو 3700 دج فما هو مبلغ المال الأصلي ؟ .

الحل

1) الكسر الذي يمثل هذه المصاريف هو :

$$\frac{1}{20} + \frac{1}{4} + \frac{1}{12} = \frac{3}{60} + \frac{15}{60} + \frac{5}{60}$$

$$= \frac{23}{60}$$

2) تعيين الكسر الذي يمثل المبلغ الباقي :

بما أن المصاريف يمثلها الكسر $\frac{23}{60}$ فإن المبلغ الكلي يمثله الكسر $\frac{60}{60}$

وبالتالي فإن المبلغ الباقي يمثله الفرق ($\frac{60}{60} - \frac{23}{60}$) ومنه الكسر الذي يمثل المبلغ الباقي من المال هو $\frac{37}{60}$

3) حساب المبلغ الأصلي :

ليكن م هو المبلغ الأصلي

الباقي من كل المال م هو الكسر $\frac{37}{60}$

الكسر $\frac{37}{60}$ يمثل الجزء الباقي من المال ، أي الباقي هو 37 جزءا من 60 جزء

وبالتالي ، المبلغ الكلي م يمثل 60 جزءا . ولدينا : 3700 تمثل 37 جزءا من المال م .

فالجزء الواحد من المال يمثله الكسر $\frac{3700}{37}$.

إذن : م = $\frac{3700}{37} \times 60 = \frac{60 \times 3700}{37}$

م = 6000 دج .

تمارين

الكسور المتكافئة

1 عين الكسور المتكافئة من بين الكسور التالية :

$\frac{2}{7}$ ؛ $\frac{5}{6}$ ؛ $\frac{14}{49}$ ؛ $\frac{15}{18}$ ؛ $\frac{1}{9}$ ؛ $\frac{15}{13}$ ؛ $\frac{3}{27}$

2 ما هو الكسر غير القابل للإختزال المكافئ للكسر $\frac{168}{280}$ ؟

ـ عين خمسة كسور مكافئة للكسر $\frac{168}{280}$ بحيث تكون مقاماتها أصغر ما يمكن ؟ .

3 نطرح العدد 20 من بسط الكسر $\frac{85}{102}$. ما هو العدد الذي يجب أن يطرح من مقام هذا الكسر لكي نحصل على كسر مكافئ له ؟ .

4 أضيف العدد 36 إلى مقام الكسر $\frac{112}{144}$. ما هو العدد الذي يجب أن نضيفه إلى البسط لكي نحصل على كسر يكافئ $\frac{112}{144}$ ؟ .

مقارنة الكسور

5 اختزل الكسور التالية ، إن أمكن ، ثم رتبها تصاعديا :

- $\frac{4}{13}$ ؛ $\frac{9}{13}$ ؛ $\frac{7}{13}$ ؛ $\frac{17}{13}$ ؛ $\frac{5}{13}$

- $\frac{35}{85}$ ؛ $\frac{64}{34}$ ؛ $\frac{23}{23}$ ؛ $\frac{20}{68}$ ؛ $\frac{30}{51}$

6 اختزل الكسور التالية ، إن أمكن ، ثم رتبها تنازليا :

- $\frac{11}{9}$ ؛ $\frac{11}{4}$ ؛ $\frac{11}{8}$ ؛ $\frac{11}{7}$ ؛ $\frac{11}{15}$
- $\frac{14}{20}$ ؛ $\frac{49}{21}$ ؛ $\frac{28}{52}$ ؛ $\frac{12}{12}$ ؛ $\frac{56}{40}$

جمع الأعداد الكسرية وطرحها

تعطى النتائج على شكل كسر غير قابل للإختزال

7 أحسب كلا من المجاميع التالية :

$7 + \frac{2}{3}$ ؛ $\frac{2}{5} + 3$ ؛ $\frac{3}{4} + \frac{9}{2}$ ؛ $\frac{4}{11} + \frac{3}{11}$

8 أحسب بطريقتين ، كلا من المجاميع التالية :

$\frac{12}{95} + \frac{3}{38} + \frac{16}{19}$ ؛ $\frac{4}{10} + \frac{3}{5} + \frac{12}{15}$ ؛ $\frac{6}{18} + \frac{2}{9} + \frac{4}{9}$

9 أحسب بطريقتين ، كلا من المجاميع التالية :

؛ $\frac{25}{30} + \frac{9}{12} + \frac{4}{14}$ ؛ $\frac{3}{10} + \frac{10}{24} + \frac{2}{15}$

$\frac{37}{1000} + \frac{14}{20} + \frac{12}{500}$ ؛ $\frac{113}{1000} + \frac{3}{10} + \frac{45}{100}$

10 أحسب المجاميع التالية (أ ، ب عددان طبيعيان ، أ ≠ 0) :

$3 + \frac{\text{أ}}{5}$ ؛ $\frac{2\text{أ}}{3} + 1$ ؛ $4 + \frac{1}{\text{أ}}$ ؛ $\frac{2\text{أ}}{5} + \frac{\text{أ}}{2}$

$\frac{2}{3\text{أ}} + \frac{5}{6\text{أ}}$ ؛ $\frac{5\text{أ}}{30} + \frac{2}{9\text{أ}}$ ؛ $\frac{2}{\text{أ}} + \frac{3\text{ب}}{7}$ ؛ $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} + \frac{3}{5}$

11 أحسب كلا من الفروق التالية :

$\frac{16}{15} - \frac{7}{15}$ ؛ $3 - \frac{2}{3}$ ؛ $\frac{13}{5} - 2$ ؛ $\frac{7}{8} - \frac{2}{3}$ ؛

$\frac{11}{12} - \frac{2}{3}$ ؛ $\frac{5}{6} - \frac{3}{10}$ ؛ $\frac{4}{21} - \frac{2}{35}$ ؛ $\frac{8}{33} - \frac{6}{55}$

$\frac{57}{100} - \frac{143}{1000}$ ؛ $\frac{81}{100} - \frac{4}{10}$

12 أحسب كلا من الفروق التالية (أ ، ب عددان طبيعيان ، أ ≠ 0 وبفرض إمكانية الطرح في كل حالة) :

$4 - \frac{\text{أ}}{3}$ ؛ $\frac{3\text{أ}}{5} - 2$ ؛ $2 - \frac{1}{\text{أ}}$ ؛ $\frac{2\text{أ}}{3} - \frac{\text{أ}}{6}$ ؛ $\frac{8\text{أ}}{15} - \frac{5\text{أ}}{12}$

$\frac{3\text{أ}}{7} + \frac{5\text{ب}}{4}$ ؛ $\frac{5}{\text{أ}} - \frac{2\text{ب}}{3}$ ؛ $1 - \frac{\text{ب}}{\text{أ}}$ ؛ $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} - 2$ ؛ $\text{أ} - \frac{\text{ب}}{\text{أ}}$

• ضرب الأعداد الكسرية وقسمتها

13 أحسب كلا من الجداءات التالية ، واختزل النتائج إن أمكن :

$9 \times \frac{7}{36}$ ؛ $5 \times \frac{4}{25}$ ؛ $13 \times \frac{5}{9}$ ؛ $4 \times \frac{3}{7}$

$\frac{3}{45} \times 12$ ؛ $\frac{11}{24} \times 9$ ؛ $\frac{7}{18} \times 5$ ؛ $\frac{6}{7} \times 2$ ؛ $\frac{5}{11} \times 3$ ؛ $6 \times \frac{3}{8}$

14 أحسب كلا من الجداءات التالية ، واختزل النتائج إن أمكن :

$\frac{15}{18} \times \frac{12}{20}$ ؛ $\frac{25}{12} \times \frac{8}{15}$ ؛ $\frac{5}{9} \times \frac{7}{10}$ ؛ $\frac{3}{5} \times \frac{4}{9}$ ؛ $\frac{5}{7} \times \frac{3}{8}$

$\frac{3}{45} \times 12$ ؛ $\frac{11}{24} \times 9$ ؛ $\frac{7}{18} \times 5$ ؛ $\frac{6}{7} \times 2$ ؛ $\frac{5}{11} \times 3$ ؛ $6 \times \frac{3}{8}$

15 أحسب بطريقتين كلا من الجداءات التالية ، ثم اختزل النتائج إن أمكن :

$\frac{6}{15} \times \frac{11}{7} \times \frac{3}{8}$ ؛ $\frac{5}{4} \times \frac{4}{3} \times \frac{3}{2}$ ؛ $\frac{7}{5} \times \frac{4}{11} \times \frac{2}{3}$

. $\frac{12}{11} \times \frac{22}{15} \times \frac{10}{8}$ ؛ $\frac{35}{12} \times \frac{6}{14} \times \frac{4}{9}$

16 أحسب كلا من الجداءات التالية ، ثم اختزل النتائج إن أمكن ، علما بأن أ عدد طبيعي غير معدوم :

$\frac{2\text{أ}}{5} \times \frac{\text{ب}}{4}$ ؛ $\frac{3\text{أ}}{8} \times \frac{6}{9\text{ب}}$ ؛ $\frac{1}{4} \times \text{أ}$ ؛ $\frac{3}{10} \times 3\text{أ}$ ؛ $2\pi \times \frac{2}{3}$

$\frac{4\text{أ}}{\text{ب}} \times \frac{2}{5}$ ؛ $\frac{4}{3} \times \frac{15}{2\text{أ}}$ ؛ $\frac{3\text{أ}}{5} \times \frac{10\text{أ}}{9}$ ؛ $\frac{5\text{أ}}{12} \times \frac{4}{7\text{أ}}$.

17 أحسب كلا من الجداءات التالية ، علما بأن أ ؛ ب ؛ جـ أعداد طبيعية غير معدومة ، ثم اختزل النتائج إن أمكن :

$\frac{2\text{أ}}{5} \times \frac{\text{ب}}{4}$ ؛ $\frac{3\text{أ}}{8} \times \frac{6}{9\text{ب}}$ ؛ $\frac{21}{5\text{أ}} \times \frac{\text{ب}}{6}$ ؛ $\frac{\text{أب}}{3} \times \frac{9}{2\text{أ}}$ ؛

$\frac{2\text{أ}}{\text{ب}} \times \frac{\text{ج}}{2\text{ب}} \times \frac{3\text{ب}}{\text{ج}} \times \frac{3\text{أ}}{5\text{ب}} \times \frac{2\text{ج}}{3\text{أ}} \times \frac{\text{أ}}{2\text{أ}}$.

18 أحسب الحواصل التالية ، ثم اختزل النتائج إن أمكن :

$\frac{3}{4} \div 2$ ؛ $\frac{5}{7} \div 3$ ؛ $\frac{9}{10} \div 3$ ؛ $\frac{12}{11} \div 4$ ؛ $\frac{10}{13} \div 6$

$3 \div \frac{1}{4}$ ؛ $6 \div \frac{2}{5}$ ؛ $8 \div \frac{24}{7}$ ؛ $10 \div \frac{5}{2}$

19 احسب الحواصل التالية ، ثم اختزل النتائج إن أمكن :

$$\frac{10}{14} \div \frac{10}{21} \ ;\ \frac{3}{7} \div \frac{2}{5} \ ;\ \frac{1}{5} \div \frac{2}{2} \ ;\ \frac{3}{5} \div \frac{1}{4}$$

- بأي كسر يجب أن نضرب العدد 5 لكي نحصل على :

$$\frac{7}{12} \ ;\ \frac{20}{9} \ ;\ \frac{5}{21} \ ;\ \frac{5}{8} \ ;\ \frac{5}{9}$$

20 أحسب بطريقتين كلا من :

$$\frac{5}{7} \times \left(\frac{1}{5} + \frac{2}{3}\right) \ ;\ \left(3 + \frac{11}{2}\right) \times 7 \ ;\ \left(\frac{7}{4} + \frac{3}{2}\right) \times \frac{4}{6}$$

$$\left(2 + \frac{4}{3} + \frac{3}{4}\right) \times \frac{7}{11} \ ;\ \left(6 + \frac{1}{7} + \frac{3}{7}\right) \times 5 \ ;\ \frac{10}{3} \times \left(\frac{9}{4} + \frac{2}{5}\right)$$

$$\frac{6}{13} \times \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right)$$

21 أحسب بطريقتين كلا من :

$$\left(\frac{16}{24} - \frac{7}{3}\right) \times 9 \ ;\ \left(\frac{2}{5} - \frac{19}{30}\right) \times \frac{6}{4} \ ;\ \left(\frac{2}{7} - \frac{3}{4}\right) \times \frac{14}{3}$$

$$\frac{2}{5} \times \left(3 - \frac{13}{4}\right) \ ;\ \frac{5}{9} \times \left(\frac{7}{10} - \frac{3}{2}\right) \ ;\ \frac{5}{7} \times \left(\frac{2}{3} - \frac{7}{5}\right)$$

22 أحسب كلا من :

$$\frac{\frac{3}{5}-2}{\frac{7}{5}} \ ; \quad \frac{\frac{3}{2}+\frac{7}{10}}{\frac{4}{5}} \ ; \quad \frac{\frac{2}{5}-3}{1-\frac{18}{10}} \ ; \quad \frac{\frac{7}{10}}{\frac{2}{5}+1}$$

$$\frac{\frac{21}{5}}{\frac{12}{5}+\frac{27}{35}} \ ; \quad \frac{\frac{1}{4}-4}{4+\frac{1}{3}} \ ; \quad \frac{\frac{5}{3}-\frac{8}{4}+\frac{1}{18}}{\frac{8}{4}-\frac{5}{3}+\frac{13}{18}}$$

5 العمليات في ح

1 - أنشطة تمهيدية

نشاط 1 :

(م ؛ و) معلم للمستقيم (ق) (الشكل)

$$(ق) \quad أ \quad ب \quad هـ \quad جـ \quad م$$

1. عين فواصل النقط أ ، ب ، جـ .

هل هذه الفواصل أعداد طبيعية ؟ هل هي أعداد صحيحة ؟

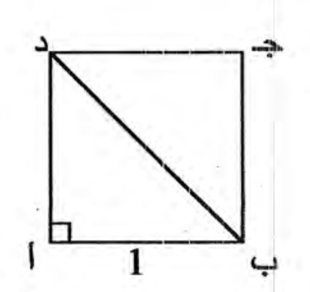
2. عين فواصل النقط أ' ، ب' ، جـ' نظائر أ ، ب ، جـ على التوالي بالنسبة إلى المبدأ م .

- هل هذه الفواصل هي أعداد طبيعية ؟
- هل هي أعداد صحيحة ؟

3. عين فاصلة النقطة هـ منتصف القطعة [ب جـ]

ما هي طبيعة هذا العدد ؟ هل هو عدد طبيعي ؟ هل هو عدد صحيح ؟ هل هو عدد ناطق ؟ .

نشاط 2 :



أ ب جـ د مربع طول ضلعه 1

في المثلث القائم أ ب د لدينا : $ب د^2 = ب أ^2 + أ د^2$

. أحسب $ب د^2$ ثم استنتج طول القطر ب د .

ل هذا العدد الناتج طبيعي ؟

هل هو صحيح ؟ ناطق ؟ أصم ؟

النشاطان السابقان يذكران بأنواع الأعداد التي درستها في السنوات السابقة و هي :

- مجموعة الأعداد الطبيعية : ط = { 0 ، 1 ، 2 ، 3 ، .... }
- مجموعة الأعداد الصحيحة ص = { ...،-2 ، -1 ، 0 ، 1 ، 2 ، 3 ، ...}
- مجموعة الأعداد الناطقة ك = { أ / ب : أ ∈ ص و ب ∈ ص* }

- توجد أعداد لا يمكن تمثيلها بكسر مثل: $\sqrt{2}$ ، $\sqrt{3}$ ، π ، .... هذه الأعداد تسمى أعدادا صماء
- و تسمى المجموعة المتكونة من الأعداد الناطقة والأعداد الصماء مجموعة الأعداد الحقيقية ح

2. العمليات في ح

نذكر فيما يلي بخواص الجمع و الضرب في ح

1) خواص الجمع في ح :

أ ، ب ، جـ ثلاثة أعداد حقيقية كيفية

- التبديل : أ + ب = ب + جـ

- التجميع : (أ + ب) + جـ = أ + (ب + جـ)

- 0 هو العنصر الحيادي بالنسبة للجمع : أ + 0 = أ

- لكل عدد حقيقي أ نظير هو : (- أ) أي أ + (- أ) = 0

2) خواص الضرب في ح : أ ، ب ، جـ ثلاث أعداد كيفية

التبديل : أ × ب = ب × أ
التجميع : (أ × ب) × جـ = أ ×(ب × جـ)
1 هو العنصر الحيادي بالنسبة للضرب أي : أ × 1 = أ

لكل عدد حقيقي غير معدوم أ نظير بالنسبة للضرب هو $\frac{1}{أ}$:

أ × $\frac{1}{أ}$ = 1 ، ($\frac{1}{أ}$ يسمى مقلوب أ)

الضرب توزيعي على الجمع :

أ × (ب + جـ) = (أ × ب) + (أ × جـ)

3) قواعد الحساب في ح

● إنعدام جداء عددين حقيقين

أ و ب عددان حقيقيان ، لدينا : أ × ب = 0 يعني : أ = 0 أو ب = 0

● قواعد الإشارة :

* أ (- ب) = - (أ ب) = (- أ) ب

* (- أ) (- ب) = أ ب

* - (أ + ب) = (- أ) + (- ب) = - أ - ب

* - (أ - ب) = - أ + ب = ب - أ

* أ - ب = أ + (- ب)

* $\frac{أ}{ب}$ = أ × ($\frac{1}{ب}$) (ب ≠ 0)

4) قوى عدد حقيقي

أ عدد حقيقي ، ن عدد طبيعي غير معدوم .

القوة النونية للعدد أ هي الجداء :

$أ^{ن}$ = أ × أ × ... × أ

ن عاملا

$أ^{ن}$ هو رمز القوة النونية للعدد أ .

أ هو أساس القوة وَ ن أس القوى .

إصطلاح :

$$0^{ن} = 0 \quad , \quad أ^{0} = 1$$

$$أ^{-ن} = \frac{1}{أ} \quad ، \quad أ^{-1} = \frac{1}{أ} \quad (أ \neq 0)$$

أمثلة :

- $(-5)^{3} = (-5)(-5)(-5)$
  $= -125$
- $5^{-3} = \frac{1}{5^{3}} = \frac{1}{5 \times 5 \times 5} = \frac{1}{125}$
- $1^{ن} = 1 \times 1 \times .... \times 1 = 1$
  ← ن عاملا →
- $(-1)^{ن} = \begin{cases} 1 & \text{إذا كان ن زوجيا} \\ -1 & \text{إذا كان ن فرديا} \end{cases}$

- **خــواص :**

أ ، ب عددان حقيقيان غير معدومين . ن ، هـ عددان صحيحان .
لدينا الخواص التالية :

الخاصية	مثال
$أ^{ن} \times أ^{هـ} = أ^{ن + هـ}$	$3^{6} \times 3^{-2} = 3^{6+(-2)} = 3^{4}$
$(أ^{ن})^{هـ} = أ^{ن . هـ}$	$(5^{3})^{-2} = 5^{3 \times (-2)} = 5^{-6}$
$(أ \times ب)^{ن} = أ^{ن} \times ب^{ن}$	$(-2)^{3} \times 5^{3} = [(-2) \times 5]^{3} = (-10)^{3}$
$\left(\frac{أ}{ب}\right)^{ن} = \frac{أ^{ن}}{ب^{ن}}$	$\left(\frac{1}{3}\right)^{2} = \frac{1}{3^{2}} = \frac{1}{9}$

- الجداءات الشهيرة

من أجل كل عددين حقيقين أ ، ب لدينا :

- $(أ + ب)^2 = أ^2 + 2أب + ب^2$
- $(أ - ب)^2 = أ^2 - 2أب + ب^2$
- $(أ + ب)(أ - ب) = أ^2 - ب^2$
- $(أ + ب)^3 = أ^3 + 3أ^2ب + 3أب^2 + ب^3$
- $(أ - ب)^3 = أ^3 - 3أ^2ب + 3أب^2 - ب^3$
- $(أ + ب)(أ^2 - أب + ب^2) = أ^3 + ب^3$
- $(أ - ب)(أ^2 + أب + ب^2) = أ^3 - ب^3$

5 . الجذر التربيعي

- لدينا $(+5)^2 = 25$ وَ $(-5)^2 = 25$

العدد 25 هو مربع لكل من العدد المتعاكسين (+5) و (- 5) .

(+ 5) يسمى الجذر التربيعي للعدد 25 ونرمز إليه بالرمز $\sqrt{25}$

تعريف :

أ عدد حقيقي موجب .
الجذر التربيعي للعدد أ هو العدد الحقيقي الموجب ب بحيث :
$\text{ب}^2 = \text{أ}$ ، ونكتب : $\text{ب} = \sqrt{\text{أ}}$

العدد $\sqrt{4}$ هو العدد الموجب 2 و نكتب $\sqrt{4} = 2$

$\sqrt{4} \neq -2$ لأن -2 ليس موجبا
و هكذا :

$\sqrt{9} = 3$ ، $\sqrt{16} = 4$ ، $\sqrt{25} = 5$ ، $\sqrt{0} = 0$ ، $\sqrt{1} = 1$

- العمليات على الجذور : أ؛ ب عددان موجبان كيفيان

خاصية	مثال
$\sqrt{\text{أ}.\text{ب}} = \sqrt{\text{أ}}.\sqrt{\text{ب}}$	$\sqrt{24} = \sqrt{4 \times 6} = \sqrt{4} \times \sqrt{6} = 2\sqrt{6}$
$\sqrt{\dfrac{\text{أ}}{\text{ب}}} = \dfrac{\sqrt{\text{أ}}}{\sqrt{\text{ب}}}$ (ب $\neq 0$)	$\sqrt{\dfrac{25}{9}} = \dfrac{\sqrt{25}}{\sqrt{9}} = \dfrac{5}{3}$
$\sqrt{\text{أ}^2\text{ب}^2} = \sqrt{\text{أ}^2} \times \sqrt{\text{ب}^2} = \text{أ}.\text{ب}$	$\sqrt{16 \times 15} = \sqrt{16} \times \sqrt{15} = 4 \times \sqrt{15}$

3 . تطبيقات

1) حذف الأقواس

• لنحسب العدد الحقيقي : $\text{ك} = 153 - (-13) - (4 + 47)$

لدينا : $\text{ك} = 153 - (-13) - (4 + 47)$

$= 153 - (-13) - (51)$ حساب المجموع $(4 + 47)$

$= 153 + 13 - 51$ (حذف الأقواس)

$= 166 - 51$

$\text{ك} = 115$

• لنحسب العبارة الجبرية :

$$\text{ل} = 2(\text{س} - 2\text{ع} + 3) - (5\text{س} - 4)\left(\text{ع} + \frac{3}{2}\right)$$

لدينا :

$$\text{ل} = 2\text{س} - 4\text{ع} + 6 - \left(5\text{س}\,\text{ع} + \frac{15}{2}\text{س} - 4\text{ع} - 6\right)$$

$$= 2\text{س} - 4\text{ع} + 6 - 5\text{س}\,\text{ع} - \frac{15}{2}\text{س} + 4\text{ع} + 6$$

$$= \left(2\text{س} - \frac{15}{2}\text{س}\right) + (4\text{ع} - 4\text{ع}) - 5\text{س}\,\text{ع} + (6 + 6)$$

$$= \left(\frac{4}{2}\text{س} - \frac{15}{2}\text{س}\right) + 0\text{ع} - 5\text{س}\,\text{ع} + 12$$

$$\text{ل} = -\frac{11}{2}\text{س} - 5\text{س}\,\text{ع} + 12$$

قــــاعـــدة :

حذف القوس المسبوق بالإشارة (-) يستلزم تغيير إشارة ما بداخل القوس ، أي
ـ (أ + ب) = ـ أ ـ ب
ـ (أ ـ ب) = ـ أ + ب
و حذف القوس المسبوق بالإشارة (+) لا يتطلب أي تغيير .

2) استعمال الجداءات الشهيرة :

لنحسب بإستعمال الجداءات الشهيرة كلا من : 62^2 ، 49^2 ، 91×89 ، $^{2}999 - {}^{2}1001$

لدينا :

• $^{2}(2 + 60) = {}^{2}62$
$^{2}2 + (60 \times 2)2 + {}^{2}60) =$
$4 + 240 + 3600 =$
$3844 = {}^{2}62$

• $^{2}(1 - 50) = {}^{2}49$
$^{2}1 + (50 \times 1)2 - {}^{2}50 =$
$1 + 100 - 2500 =$
$2401 = {}^{2}49$

• $(1 + 90)(1 - 90) = 91 \times 89$
$^{2}1 - {}^{2}90 =$
$1 - 8100 =$
$8099 = 91 \times 89$

• $(999 - 1001)(999 + 1001) = {}^{2}999 - {}^{2}1001$
$2 \times 2000 =$
$4000 = {}^{2}999 - {}^{2}1001$

3) تحويل كسر مقامه عدد أصم إلى كسر مقامه عدد ناطق

• لنبحث عن كسر مكافئ للكسر $\frac{3}{4+\sqrt{5}}$ ومقامه عدد ناطق .

.لاحظ أن المقام $4+\sqrt{5}$ هو عدد غير ناطق .

العدد $4-\sqrt{5}$ يسمى مرافق العدد $4+\sqrt{5}$

و الجداء $(4+\sqrt{5})(4-\sqrt{5}) = 4^2 - 5 = 11$ هو عدد ناطق .

فبضرب حدي الكسر $\frac{3}{4+\sqrt{5}}$ في مرافق المقام وهو $4-\sqrt{5}$ نحصل على :

$$\frac{3}{4+\sqrt{5}} = \frac{3(4-\sqrt{5})}{(4+\sqrt{5})(4-\sqrt{5})} = \frac{12-3\sqrt{5}}{16-5}$$

$$= \frac{12-3\sqrt{5}}{11}$$

وهكذا وجدنا كسرا مقامه عدد ناطق يكافئ الكسر : $\frac{3}{4-\sqrt{5}}$

قـــاعــدة :

لإيجاد كسر مقامه ناطق و يكافئ كسرا مقامه أصم ، نضرب البسط والمقام في مرافق المقام

• أ ، ب عددان حقيقيان موجبان :

كل من العددين $\sqrt{\text{أ}} + \text{ب}$ وَ $\sqrt{\text{أ}} - \text{ب}$ هو مرافق الآخر

و كل من العددين $\sqrt{\text{أ}} + \sqrt{\text{ب}}$ وَ $\sqrt{\text{أ}} - \sqrt{\text{ب}}$ هو مرافق الآخر

4) مقارنة عددين أصمين

لنقارن بين العددين الحقيقين :

$$2-\sqrt{3} \quad \text{و} \quad \sqrt{2}-1$$

لندرس إشارة الفرق $(2-\sqrt{3})-(\sqrt{2}-1)$
لدينا :

$$(2-\sqrt{3})-(\sqrt{2}-1) = 3-\sqrt{3}-\sqrt{2}$$

$$= 3-(\sqrt{2}+\sqrt{3})$$

$$= \frac{\left[3-(\sqrt{2}+\sqrt{3})\right]\left[3+(\sqrt{2}+\sqrt{3})\right]}{3+(\sqrt{2}+\sqrt{3})}$$

(ضرب وقسمة العدد في مرافقه)

$$= \frac{9-(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2}{3+(\sqrt{2}+\sqrt{3})}$$

$$= \frac{9-(3+2\sqrt{6}+2)}{3+(\sqrt{2}+\sqrt{3})}$$

$$= \frac{4 - 2\sqrt{6}}{3 + (\sqrt{3} + \sqrt{2})}$$

$$= \frac{2(2 - \sqrt{6})(2 + \sqrt{6})}{\left[3 + (\sqrt{3} + \sqrt{2})\right](2 + \sqrt{6})}$$

$$= \frac{2(4 - 6)}{\left[3 + (\sqrt{3} + \sqrt{2})\right](2 + \sqrt{6})}$$

$$= \frac{-4}{\left[3 + (\sqrt{3} + \sqrt{2})\right](2 + \sqrt{6})} < 0$$

(لأن البسط سالب والمقام موجب)

فالفرق ($2 - \sqrt{3}$) − ($\sqrt{2} - 1$) سالب ومنه العدد ($2 - \sqrt{3}$) أصغر من العدد ($\sqrt{2} - 1$) .

و منه القاعدة التالية

قاعدة

لمقارنة عددين حقيقين أ ؛ ب ندرس إشارة الفرق أ − ب

- أ − ب > 0 يعني أ > ب
- أ − ب < 0 يعني أ < ب

4 . تمارين محلولة

تمـــريـــن 1

س ، ع عددان حقيقيان

أحسب العدد : $أ = \dfrac{2\text{س} + 5\text{ع}}{3\text{س} - 4\text{ع}}$ من أجل :

1) س = - 4 وَ ع = - 2

2) $\text{س} = \dfrac{1}{2}$ وَ $\text{ع} = \dfrac{1}{3}$

3) $\text{س} = \sqrt{2}$ وَ $\text{ع} = \sqrt{3}$.

الحل

1) من أجل : س = - 4 وَ ع = - 2 يكون :

$$أ = \frac{2(-4) + 5(-2)}{3(-4) - 4(-2)}$$

$$أ = \frac{-8 - 10}{-12 + 8}$$

$$أ = \frac{-18}{-4} = + \frac{9}{2}$$

2) من أجل $\text{س} = \dfrac{1}{2}$ ، و $\text{ع} = \dfrac{1}{3}$

يكون :

$$\text{أ} = \frac{2 \times \frac{1}{2} + 5 \times \frac{1}{3}}{3 \times \frac{1}{2} - 4 \times \frac{1}{3}} = \frac{1 + \frac{5}{3}}{\frac{3}{2} - \frac{4}{3}}$$

$$\text{أ} = \frac{\frac{3 + 5}{3}}{\frac{9 - 8}{6}} = \frac{\frac{8}{3}}{\frac{1}{6}}$$

$$\text{أ} = \frac{8}{3} \times \frac{6}{1} = \frac{8 \times 2 \times 3}{3} = 16$$

3) من أجل س = $\sqrt{2}$ ، وَ ع = $\sqrt{3}$ يكون :

$$\text{أ} = \frac{2\sqrt{2} + 5\sqrt{3}}{3\sqrt{2} - 4\sqrt{3}}$$

$$\text{أ} = \frac{\left(2\sqrt{2} + 5\sqrt{3}\right)\left(3\sqrt{2} + 4\sqrt{3}\right)}{\left(3\sqrt{2} - 4\sqrt{3}\right)\left(3\sqrt{2} + 4\sqrt{3}\right)}$$

(بضرب البسط والمقام في مرافق المقام)

$$\text{أ} = \frac{12 + 8\sqrt{6} + 15\sqrt{6} + 60}{18 - 48}$$

$$\text{أ} = \frac{72 + 23\sqrt{6}}{-30} = -\frac{72 + 23\sqrt{6}}{30}$$

تمرين 2

بسط العبارة التالية :

$$\text{ل} = \sqrt{\frac{16}{20}} - \sqrt{\frac{125}{49}} + 2\sqrt{20}$$

الحل

لدينا :

$$\text{ل} = \sqrt{\frac{16}{20}} - \sqrt{\frac{125}{49}} + 2\sqrt{20}$$

$$\text{ل} = \sqrt{\frac{4^2}{2^2 \times 5}} - \sqrt{\frac{5^2 \times 5}{7^2}} + 2\sqrt{2^2 \times 5}$$

$$\text{ل} = \frac{\sqrt{4^2}}{\sqrt{2^2 \times 5}} - \frac{\sqrt{5^2 \times 5}}{\sqrt{7^2}} + 2\sqrt{2^2} \times \sqrt{5}$$ ونعلم أن :

$$\sqrt{\frac{\text{أ}}{\text{ب}}} = \frac{\sqrt{\text{أ}}}{\sqrt{\text{ب}}} \quad \text{و} \quad \sqrt{\text{أب}} = \sqrt{\text{أ}}\,\sqrt{\text{ب}}$$

$$\text{ل} = \frac{4}{2\sqrt{5}} - \frac{5\sqrt{5}}{7} + 2 \times 2\sqrt{5} \qquad (\sqrt{\text{أ}^2} = \text{أ} \text{ ، } \text{أ} > 0)$$

$$\text{ل} = \frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{5\sqrt{5}}{7} + 4\sqrt{5}$$

$$\text{ل} = \frac{2}{5}\sqrt{5} - \frac{5}{7}\sqrt{5} + 4\sqrt{5}$$

$$\text{ل} = \left(\frac{2}{5} - \frac{5}{7} + 4\right)\sqrt{5} \text{ ، } (\sqrt{5} \text{ عامل مشترك})$$

$$\text{ل} = \frac{14 - 25 + 140}{35}\sqrt{5} \qquad (\text{توحيد المقامات})$$

$$\text{ل} = \frac{129}{35}\sqrt{5}$$

تمارين

العمليات في ح

1 أجر العمليات التالية :

- أ = $17 + [(7 - 21)3 - 4] \times 11$
- ب = $(\frac{7}{2} - 1)5 + \left[(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}) - (\frac{3}{5} - \frac{5}{3})\right]\frac{3}{2}$
- جـ = $5 + (2 - \frac{1}{3} - \frac{2}{5}) - (\frac{1}{2} - \frac{1}{5} - 3)$
- د = $\left[(\frac{1}{2} - 2)\frac{2}{5} + \frac{7}{2} - 11\right] \times (\frac{7}{3} - 7)$
- هـ = $\left[(\frac{7}{4} + \frac{2}{3}) - 2\right] - \left[(\frac{1}{4} + \frac{5}{3}) - 3\right] - (\frac{2}{3} + \frac{3}{4}) - 2$

2 أحسب العبارات التالية :

أ = $\dfrac{\frac{1}{12} - \frac{1}{3} + 2}{\frac{2}{9} - \frac{1}{4} - 5}$ ؛ ب = $\dfrac{\dfrac{\frac{3}{2} - 1}{\frac{1}{4} - 2} + 1}{\dfrac{2}{1 + \frac{3}{2}} - 3}$ ؛ جـ = $\dfrac{أ}{ب}$

3 أحسب العددين التاليين :

$$أ = \frac{9 - \frac{1}{3} + \frac{5}{6} - \frac{25}{4}}{2 + \frac{1}{6} - \frac{5}{12}} \times \frac{3 - \frac{2}{5}}{1 - \frac{5}{3}}$$

$$ب = \frac{2 - \frac{1}{8}}{3 + \frac{1}{4}} \div \frac{7 - \frac{1}{2}}{5 - \frac{3}{4}}$$

4 بسط العبارات الجبرية التالية إلى أبسط ما يمكن :

$$أ = 2(س - 2ع + 3) - (5س - 4)(ع + \frac{3}{2})$$

$$ب = 5[3 - 2(س - 5)] - 2(1 - 2س)(5 - س)$$

$$جـ = 5[4\{3(2(س - 1) + 1) + 2\} + 3] + 5$$

5 أحسب العدد $ل = \frac{2س + 5ع}{س + 3ع}$ في كل من الحالات التالية :

1) س = 1 وَ ع = 2
2) س = 4 وَ ع = 8
3) س = ـ3 وَ ع = ـ 6

4) $س = -\frac{1}{2}$ و $ع = -1$

5) $س = \frac{2}{3}$ و $ع = \frac{4}{3}$

قوى عدد حقيقي

6 بسط العبارات التالية :

$أ = \frac{6^{2} \times 25^{4} \times 27^{3}}{30^{2} \times 125^{2} \times 10^{3}}$ ؛ $ب = \frac{15^{4} \times 30^{2} \times 40^{3}}{5^{3} \times 9^{2} \times 2^{4}}$ ؛ $جـ = \frac{(-14)^{4} \times (-15)^{3}}{70^{3} \times 21^{5}}$

$د = \frac{\left(-\frac{4}{7}\right)^{2} \times \left(-\frac{2}{5}\right)^{3}}{\left(\frac{14}{8}\right)^{3} \times \left(\frac{8}{10}\right)^{3}}$

إرشاد : يمكن البدء بتحليل الأعداد إلى عوامل أولية .

7 بسط كتابة الأعداد التالية :

$أ = \frac{\left(2^{-2} \times 3^{5}\right)^{2}}{\left(2^{3} \times 9^{-1}\right)^{-3}}$ ؛ $ب = \frac{2^{-3} \times 5^{3}}{25 \times 4} \div \frac{5 \times 10^{2}}{2^{8}}$

8 بسط كلا مما يلي (أ ؛ ب عددان حقيقيان غير معدومين)

$أ^{3} \times أ^{4}$ ؛ $أ^{-4} \times أ^{3}$ ؛ $أ^{2} \times ب^{3} \times أ^{-2} \times ب^{-4}$ ؛ $\left(أ^{3}\right)^{2}$ ؛ $\left(أ^{2}\right)^{3}$ ؛ $\left(أ^{-3}\right)^{-2}$

$\dfrac{أ^{3} \times ب^{-2}}{أ^{4} \times ب^{-4}}$ ؛ $\left(\dfrac{1}{أ^{5}}\right)^{-2}$ ؛ $\left(أ^{2} \times ب^{3}\right)^{5}$ ؛ $\left(أ^{-2} \times ب^{3}\right)^{-2}$ ؛ $\left(\dfrac{أ}{ب}\right)^{-3}$ ؛ $\sqrt{أ^{4}\, ب^{6}}$

9 عين الأعداد الصحيحة م ؛ ن ؛ هـ بحيث :

- $2^{م} \times 3^{ن} \times 5^{هـ} = 21600$

- $2^{م} \times 3^{ن} \times 5^{هـ} = \dfrac{15552}{100}$

إرشاد : استعمل التحليل إلى عوامل أولية .

الجداءات الشهيرة

10 احسب الجداءات التالية (أ ؛ ب ؛ س أعداد حقيقية)

$(2أ + 3ب)^{2}$ ؛ $(-أ + 2ب)^{2}$ ؛ $(5أ - 2ب)^{2}$

$\left(\dfrac{1}{2} - س\right)^{2}$ ؛ $\left(2 - \dfrac{1}{2}س\right)^{2}$ ؛ $\left(س + \dfrac{1}{س}\right)^{2}$ مع $(س \neq 0)$

$(س^{2} - 1)^{2}$.

11 أحسب الجداءات التالية :

$(2\text{أ} + 3\text{ب})(2\text{أ} - 3\text{ب})$ ؛ $(-\text{أ} + 2\text{ب})(\text{أ} + 2\text{ب})$ ؛

$(\text{س} - 1)(\text{س} + 1)$ ؛ $(\text{س}^3 - 1)(\text{س}^3 + 1)$

12 أحسب باستعمال الجداءات الشهيرة ما يلي :

31^2 ؛ 29^2 ؛ $4,998 \times 5,001$ ؛ $2,83 \times 3,17$

13 أ ؛ ب ؛ جـ ثلاثة أعداد حقيقية ، أنشر ما يلي :

1) $(\text{أ} + \text{ب})^2 - (\text{أ} - \text{ب})^2$

2) $(\text{أ} + \text{ب} + \text{جـ})^2 + (\text{أ} - \text{ب})^2 + (\text{ب} - \text{جـ})^2 + (\text{جـ} - \text{أ})^2$

3) $(\text{أ} + \text{ب})^3 - (\text{أ}^3 + \text{ب}^3)$

4) $(\text{أ} + \text{ب})^2 + (\text{أ} - \text{ب})^2$.

الجذور التربيعية

14 بسط العبارات التالية :

$\text{أ} = \sqrt{72} - \sqrt{50} - \sqrt{98}$ ؛ $\text{ب} = 5\sqrt{12} + 2\sqrt{27} - \sqrt{75}$

$$\text{جـ} = \sqrt{\frac{7}{5}} + 5\sqrt{\frac{28}{12}} - 2\sqrt{\frac{63}{75}}$$

15 أحسب الجداءات التالية :

$(\sqrt{5} + \sqrt{3})^2$ ؛ $(\sqrt{2} - 1)^2$ ؛ $(5 + \sqrt{7})^2$ ؛ $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2$

16 أنجز الجداءات التالية :

أ = $(\sqrt{6} + 2)(\sqrt{3} - \sqrt{2})$

ب = $(\sqrt{8} - \sqrt{18})(\sqrt{50} + \sqrt{72} - \sqrt{32})$

جـ = $\sqrt{5 + \sqrt{3}} \times \sqrt{5 - \sqrt{3}}$

17 لتكن العبارة :

$\text{ل} = \text{س}^{3} + \text{س}^{2} + \text{س} + 1$

أحسب ل من أجل :

- $\text{س} = \sqrt{3}$
- $\text{س} = -\sqrt{2}$
- $\text{س} = 1 + \sqrt{2}$
- $\text{س} = 5 - \sqrt{3}$

18 عين مرافق كل مما يلي ؛ ثم أحسب جداء كل عدد ومرافقه .

$(-5 + 3\sqrt{2})$ ؛ $(2\sqrt{5} - 4)$ ؛ $(-\sqrt{5} - 3)$ ؛ $\sqrt{2} + \sqrt{5}$

19 قارن بين الأعداد التالية :

1) $3\sqrt{20}$ وَ $4\sqrt{12}$

2) $14 - 6\sqrt{5}$ وَ $3 - \sqrt{5}$

3) $\sqrt{6} + \sqrt{2}$ وَ $\sqrt{4 + 2\sqrt{3}}$

6 المتباينات في ح

I. أنشطة تمهيدية

نشاط 1 :

لتكن الأعداد : 0 ؛ + 4 ؛ ـ 5

ما هو أكبر عدد ؟ ما هو أصغر عدد ؟ .

أتمم الكتابة :

... > 0 ؛ ... < 0 ؛ ... < ...

- كل من الكتابات السابقة هي متباينة .

نعلم أن كل عدد سالب أصغر من أي عدد موجب .

مثلا : (ـ 5) أصغر من + 4 نكتب : ـ 5 < +4

العددان (ـ 5) وَ (+4)هما طرفان هذه المتباينة .

نشاط 2 :

لا يمكن التعبير عن مسافة إلا بعدد موجب .

فمثلا لا نقول إن المسافة بين الجزائر وَ وهران هي : ـ 431 كم .

- أ ؛ ب ؛ جـ ؛ د نقاط من مستقيم (م ؛ $\overrightarrow{و}$) معلم له .

فواصلها على الترتيب هي : + 7 ؛ + 4 ؛ ـ 3 ؛ ـ $\frac{3}{2}$

جـ د ب أ

3 -   1,5 ـ   م   1+   4+   7+

- المسافة بين نقطتين هي عدد موجب

ـ المسافة بين م وَ أ هي : 7 ـ 0 = 7

ـ المسافة بين م وَ جـ هي : 0 ـ (ـ 3) = + 3

لاحظ أن المسافة بين نقطتين يساوي (أكبر فاصلة ـ أصغر فاصلة)

- أحسب المسافات التالية :

ـ المسافة بين أ وَ ب

ـ المسافة بين م وَ د

ـ المسافة بين م وَ جـ

ـ المسافة بين د وَ جـ

إذا كانت ن نقطة فاصلتها س (س > 0 أو س < 0)
فإن المسافة بين م وَ ن هي العدد الموجب .
(س ـ 0) أو (0 ـ س) أي العدد الموجب س أو ـ س
نعبر عن هذا العدد الموجب بالرمز | س | ونقرأ القيمة المطلقة للعدد س .

2. المتباينات في ح

1) المتباينات في ح

تعريف

أ وَ ب عددان حقيقيان .

أ $\leq$ ب معناه (ب ـ أ) عدد موجب أو معدوم .

من هذا التعريف تنتج القاعدة العملية التالية :

- لمقارنة عددين حقيقيين ندرس إشارة فرقهما .

مثال : $\frac{2}{3} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{12} < 0$ إذن $\frac{2}{3} < \frac{3}{4}$

$(-7) - (-9) = 2 > 0$ إذن $(-7) > -9$.

2) المتباينات والعمليات في ح

- نذكر بما يلي :
- المتباينات والجمع

أ وَ ب وَ جـ أعداد حقيقية .

بجمع جـ إلى المتباينة أ $\leq$ ب نحصل على متباينة أخرى لها نفس الإتجاه وهي : أ + جـ $\leq$ ب + جـ .

مثال : لتكن المتباينة : أ ≤ 2

بإضافة 3 إلى الطرفين نحصل على المتباينة : أ + 3 ≤ 5

- لتكن المتباينة : ب + $\frac{1}{2} < 4$

بإضافة ($-\frac{1}{2}$) إلى الطرفين نحصل على المتباينة : ب $\leq \frac{7}{2}$

أ ≥ ب ، جـ ≥ د متباينتان لهما نفس الإتجاه .
بالجمع طرفا إلى طرف نحصل على متباينة أخرى لها نفس الإتجاه وهي :
أ + جـ ≥ ب + د

مثال : لتكن أ ≥ -5 وَ ب ≥ 6
بالجمع طرفا إلى طرف نحصل على : أ + ب ≥ -5 + 6
أي : أ + ب ≥ 1

• المتباينات والضرب

أ وَ ب عددان حقيقيان .
بضرب (أو قسمة) طرفي المتباينة أ ≥ ب في عدد حقيقي موجب تماما جـ
نحصل على متباينة أخرى لها نفس الإتجاه وهي : أ جـ ≥ ب جـ .

مثال : . لتكن المتباينة : أ ≥ $\frac{1}{4}$
بضرب الطرفين في العدد الموجب 5 نحصل على المتباينة التي لها نفس الإتجاه :
5 أ ≥ $\frac{5}{4}$
. لتكن : 2 أ ≤ -6
بقسمة الطرفين على العدد الموجب 2 نحصل على :
أ ≤ -3

أ وَ ب عددان حقيقيان .
بضرب (أو قسمة) طرفي المتباينة أ ≥ ب في عدد حقيقي سالب تماما جـ
نحصل على متباينة أخرى لها إتجاه معاكس وهي : أ جـ ≤ ب جـ .

مثال : لتكن : أ $\geq \frac{1}{2}$

بضرب الطرفين في العدد السالب (-2) نحصل على المتباينة التي لها إتجاه معاكس

(-2) أ $\leq \frac{1}{2}(-2)$ أي : -2 أ $\leq$ -1

- **المتباينات والتربيع والجذر التربيعي**

أ ؛ ب عددان حقيقيان موجبان .

. إذا كان : أ > ب فإن : أ^2 > ب^2

. إذا كان : أ > ب فإن : $\sqrt{\text{أ}} > \sqrt{\text{ب}}$

مثال :

. بما أن : $\frac{1}{2} > \frac{1}{3}$ فإن : $\frac{1}{4} > \frac{1}{9}$

. بما أن : $\frac{4}{9} > \frac{2}{25}$ فإن : $\sqrt{\frac{4}{9}} > \sqrt{\frac{2}{25}}$

أي : $\frac{2}{3} > \frac{\sqrt{2}}{5}$

2 . المجالات في ح

تعاريف

أ ؛ ب عددان حقيقيان حيث : أ < ب

. المجال المغلق [أ ، ب] هو مجموعة الأعداد الحقيقية التي تحقق المتباينة المزدوجة : أ $\leq$ س $\leq$ ب .

مثال :

المجال المغلق [2 ؛ 5] هو مجموعة الأعداد الحقيقية س حيث :

$2 \leq$ س ≤ 5

ويمثل بالشكل :

م   1+   2+   5+

. المجال المفتوح] أ ، ب [هو مجموعة الأعداد الحقيقية التي تحقق المتباينة المزدوجة : أ < س < ب .

تسمى هذه المتباينة المزدوجة حصرا للعدد س

مثال :

المجال المفتوح] ـ1 ؛ 3 [هو مجموعة الأعداد الحقيقية س حيث :

ـ1 < س < 3

ويمثل بالشكل :

1ـ   م   1+   3+

. المجال نصف المغلق [أ ، +∞ [هو مجموعة الأعداد الحقيقية التي تحقق المتباينة : س ≥ أ .

مثال :

المجال نصف المغلق [1 ؛ +∞ [ويمثل بالشكل :

م   1+

. المجال نصف المفتوح عند ـ2] ـ∞ ؛ ـ2 [هو مجموعة الأعداد الحقيقية التي تحقق المتباينة : س < ـ2 .

ويمثل بالشكل :

2 ـ   م

ملاحظة : $ح =]-\infty \,؛\, +\infty[$

$ح_+ = [0 \,؛\, +\infty[$

$ح_- =]-\infty \,؛\, 0]$

3 . القيمة المطلقة لعدد حقيقي

تعريف

القيمة المطلقة لعدد حقيقي س هي العدد الحقيقي الموجب الذي رمزه | س | والمعرف كما يلي :

| س | = + س إذا كان : س ≥ 0

| س | = − س إذا كان: س ≤ 0

أمثلة :

| 4 | = 4 ؛ | −4 | = 4 ؛ | 3 − π | = π − 3

من التعريف السابق نستنتج أنه :

- من أجل كل عدد حقيقي س لدينا :

  - | س | ≥ 0
  - | س | = | − س |
  - | س² | = | س |²

- من أجل كل عددين حقيقيين س وَ ع لدينا :

| س | = | ع | معناه (س = ع) أو (س = − ع)

- **القيمة المطلقة والجذر التربيعي**

لدينا : $(-2)^2 = 4$ وَ $(+2)^2 = 4$

بما أن : $\sqrt{4}$ هو عدد موجب فإن : $\sqrt{4} = |-2| = |+2|$

أي : $\sqrt{4} = 2$

وبصفة عامة :

من أجل كل عدد حقيقي أ لدينا : $\sqrt{أ^2} = |أ|$

الخواص

- من أجل كل عددين حقيقيين أ وَ ب لدينا :

$$|أ \times ب| = |أ| \times |ب|$$

- من أجل كل عددين حقيقيين أ وَ ب (ب ≠ 0) لدينا :

$$\left|\frac{أ}{ب}\right| = \frac{|أ|}{|ب|}$$

أمثلة :

- $|-2س| = |-2||س|$
$= 2|س|$

$$= \begin{cases} 2س \text{ إذا كان : } س \geq 0 \\ -2س \text{ إذا كان : } س \leq 0 \end{cases}$$

- $\left| \dfrac{س}{-2} \right| = \dfrac{|س|}{|-2|} = \dfrac{1}{2} |س|$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{2} س & \text{إذا كان : } س \geq 0 \\ -\dfrac{1}{2} س & \text{إذا كان : } س \leq 0 \end{cases}$$

- القيمة المطلقة والمجالات :

ما معنى المتباينة : $|س| \leq 1$ ؟ ....(1)

- إذا كان : $س \geq 0$ فإن (1) تعني : $س \leq 1$ ....(2)
- إذا كان : $س \leq 0$ فإن (1) تعني : $-س \leq 1$

أي : $س \geq -1$ ....(3)

من (1) وَ (2) نحصل على ما يلي :

من أجل كل عدد حقيقي س فإن (1) تعني : $-1 \leq س \leq +1$

أي س ينتمي إلى المجال المغلق $[-1 ; +1]$

وبصفة عامة :

$|س| \leq أ$ معناه : $-أ \leq س \leq +أ$ معناه $س \in [-أ ; أ]$

4 . تطبيقات

1) مقارنة عددين حقيقيين

لنقارن بين العددين الحقيقيين : $\dfrac{1}{17}$ وَ $\dfrac{1}{12\sqrt{2}}$

لإجراء المقارنة بين هذين العددين تكفي المقارنة بين : 17^2 وَ $(12\sqrt{2})^2$

أي : 289 و 288 ومنه : $289 > 288$

أي : $17 > 12\sqrt{2}$ وبالتالي : $\frac{1}{12\sqrt{2}} > \frac{1}{17}$

لمقارنة عددين موجبين يكفي مقارنة مربعيهما

2) كتابة عبارة بدون رمز القيمة المطلقة

س عدد حقيقي

لنكتب العبارة $|3\text{س} - 1|$ بدون رمز القيمة المطلقة . من أجل ذلك ندرس إشارة : $3\text{س} - 1$

لدينا : $3\text{س} - 1 \geq 0$ معناه : $3\text{س} \geq 1$ (بإضافة 1 إلى الطرفين)

من $3\text{س} \geq 1$ نستنتج : $\text{س} \geq \frac{1}{3}$ (بقسمة الطرفين على 3)

ومنه إشارة $3\text{س} - 1$:

- من أجل $\text{س} > \frac{1}{3}$ يكون : $3\text{س} - 1 > 0$
- من أجل $\text{س} = \frac{1}{3}$ يكون : $3\text{س} - 1 = 0$
- من أجل $\text{س} < \frac{1}{3}$ يكون : $3\text{س} - 1 < 0$

وبالتالي :

- $|3\text{س} - 1| = 3\text{س} - 1$ إذا كان : $\text{س} > \frac{1}{3}$
- $|3\text{س} - 1| = 0$ إذا كان : $\text{س} = \frac{1}{3}$

• | 3 س – 1 | = 1 – 3 س إذا كان : س < 1/3

نلخص هذه النتائج في الجدول التالي :

س	∞ –	3/1 -	∞+
3 س – 1	—	0	+
| 3 س – 1 |	1 – 3 س	0	3 س – 1

لكتابة عبارة بدون رمز القيمة المطلقة ندرس إشارة المقدار الموجود داخل رمز القيمة المطلقة .

3) حصر عدد حقيقي

أ ، ب عددان حقيقيان حيث :

2,3 ≤ أ ≤ 2,4 وَ – 2,1 ≤ ب ≤ – 2

وليكن العدد جـ = (أ + 2 ب + 1) / (– 3)

لنبين أن العدد جـ يحقق : 2/10 ≤ جـ ≤ 3/10

لدينا : 2,3 ≤ أ ≤ 2,4 ....(1)

– 2,1 ≤ ب ≤ – 2 ....(2)

بضرب أطراف (2) في العدد 2 نحصل على :

2 (– 2,1) ≤ 2 ب ≤ 2 (– 2)

– 4,2 ≤ 2 ب ≤ – 4 ....(3)

وبجمع أطراف (1) وَ (3) نحصل على :

2,3 + (– 4,2) ≤ أ + 2 ب ≤ 2,4 + (– 4)

أي : – 1,9 ≤ أ + 2 ب ≤ – 1,6 ....(4)

وباضافة 1 إلى أطراف (4) نحصل على :

1 + – 1,9 ≤ أ + 2 ب + 1 ≤ – 1,6 + 1

$-0{,}9 \le \text{أ} + 2\text{ب} + 1 \le -0{,}6$ ....(5)

وبقسمة أطراف (5) على (ـ 3) نحصل على :

$$\frac{-0{,}9}{-3} \ge \frac{\text{أ} + 2\text{ب} + 1}{-3} \ge \frac{-0{,}6}{-3}$$

أي : $0{,}3 \ge \frac{\text{أ} + 2\text{ب} + 1}{-3} \ge 0{,}2$

ومنه : $0{,}2 \le \frac{\text{أ} + 2\text{ب} + 1}{-3} \le 0{,}3$

أي : $\frac{2}{10} \le \text{جـ} \le \frac{3}{10}$ ....(6)

المتباينة المزدوجة (6) تعني أننا وجدنا حصرا للعدد جـ

- $\frac{2}{10}$ تسمى القيمة المقربة بالنقصان إلى $\frac{1}{10}$ للعدد جـ
- $\frac{3}{10}$ تسمى القيمة المقربة بالزيادة إلى $\frac{1}{10}$ للعدد جـ

باستعمال المتباينات يمكن إيجاد حصر لعدد

5 . تمارين محلولة

تمرين 1

وحدة الطول هي السنتيمتر .
س وَ ع هما طول وعرض مائدة مستطيلة حيث :
$120 < س < 121$ وَ $75 < ع < 76$
عين حصرا لمحيط هذه المائدة .

الحل

محيط هذه المائدة هو : $2 (س + ع)$
لنبحث عن حصر للعدد : $2 (س + ع)$
لدينا : $120 < س < 125$
$75 < ع < 76$
بالجمع طرفا لطرف نجد : $195 < س + ع < 197$
بضرب الأطراف في 2 نحصل على :
$2 \times 195 < 2 (س + ع) < 2 \times 197$
أي : $390 < 2 (س + ع) < 394$
محيط هذه المائدة محصور بين : 390 سم وَ 394 سم

تمرين 2

س عدد حقيقي .
أكتب العدد : $ك = | -س | + | س - 1 |$
بدون رمز القيمة المطلقة .

الحل

لكتابة ك بدون رمز القيمة المطلقة ندرس على التوالي إشارة س وإشارة س – 1

- إشارة –س :



يكون $-س \geq 0$ من أجل : $س \leq 0$
يكون $-س \leq 0$ من أجل : $س \geq 0$

- إشارة س ـ 1 :

يكون س ـ 1 ≤ 0 من أجل : س ≤ 1

يكون س ـ 1 ≥ 0 من أجل : س ≥ 1

نلخص هذه النتائج في الجدول التالي :

س	∞ ـ		0		1		∞+
ـ س		+	0	—		—	
س ـ 1		—		—	0	+	
| ـ س |		ـ س		س		س	
| س ـ 1 |		ـ (س ـ 1)		ـ (س ـ 1)		(س ـ 1)	
ك		ـ س ـ (س ـ 1)		س ـ (س ـ 1)		س + (س ـ 1)	

من الجدول نستخلص :

- إذا كان : س ≤ 0 فإن : ك = ـ 2 س + 1
- إذا كان : 0 ≤ س ≤ 1 فإن : ك = س ـ (س ـ 1) = 1
- إذا كان : س ≥ 1 فإن : ك = س + (س ـ 1) = 2س ـ 1

تمرين 3

س عدد حقيقي .
أكتب العدد : ل = | (س ـ 4) × (3 ـ س) |
بدون رمز القيمة المطلقة .

الحل

لكتابة ل بدون رمز القيمة المطلقة ندرس إشارة كل من (س ـ 4) و (3 ـ س)

- إشارة س ـ 4 :

يكون س ـ 4 ≤ 0 من أجل : س ≤ 4

يكون س ـ 4 ≥ 0 من أجل : س ≥ 4

- إشارة 3 ـ س :

يكون 3 ـ س ≤ 0 من أجل : س ≥ 3

يكون 3 ـ س ≥ 0 من أجل : س ≤ 3

— + 3 م

نبين في الجدول الآتي إشارة (س ـ 4)(3 ـ س) :

س	‎−∞	3		4		+∞
س ـ 4	—		—	0	+	
3 ـ س	+	0	—		—	
(س -4)(3 - س)	—		+		—	
ل	ـ (س -4)(3 - س)		(س -4)(3 - س)		ـ (س -4)(3 - س)	

من الجدول نستخلص :

- إذا كان : س ≥ 3 أو س ≤ 4 فإن : ل = ـ (س -4)(3 - س)
- إذا كان : 3 ≤ س ≥ 4 فإن : ل = (س -4)(3 - س)

تمارين

• المتباينات في ح

1 عبر عن كل من المتباينات التالية بمجال :

أ) س ≤ 3 ؛ ب) س ≥ – 4 ؛ جـ) س < $\frac{2}{3}$

د) س < 10 ؛ هـ) س ≤ 0 ؛ و) س < 0

2 عبر عن كل من المتباينات التالية باتحاد مجالين :

أ) س ≥ – 2 أو س ≤ 7 ؛ ب) س < 10 أو س < 12

جـ) س < 0 أو س < – 4

3 عبر عن كل من المتباينات التالية بتقاطع مجالين :

أ) س ≤ – 3 وَ س ≥ 5 ؛ ب) س > 0 وَ س < 2,5

جـ) س < 0 وَ س > – 4

4 عبر بمتباينات مزدوجة عن انتماء العدد س إلى المجالات التالية :

أ) س ∈ [– 10 ؛ 2] ؛ س ∈ [– 3 ؛ 7]

ب) س ∈]– ∞ ؛ 3] ؛ س ∈ [– 6 ؛ + ∞[

جـ) س ∈ [7 ؛ + ∞[؛ س ∈]– 5 ؛ + ∞[

د) س ∈]3 ؛ 18] ؛ س ∈]17 ؛ 20[

5 مثل على محور قيم العدد الحقيقي س التي تحقق ما يلي :

أ) س < 7 وَ س ≤ 0

ب) س > – 3 وَ س < 2

جـ) س ≥ 5 وَ س > – 4

6 عبر بمتباينات عن الجزء غير المشطب فيما يلي :

–2 3

(أ)

–10 0 10

(ب)

$+1$ 0

(د) .... (جـ)

7 س عدد حقيقي حيث $س > 2$ ، عبر بمتباينات عن كل مما يلي :

$\frac{1}{س}$ ؛ $س^2$ ؛ $س - 1$ ؛ $\frac{1}{س - 3}$

8 أعد نفس التمرين (7) إذا كان :

أ) $س > 4$ ب) $س > -1$

9 ب عدد حقيقي غير معدوم :

باستعمال الخواص الملائمة للمتباينات . عين س في كل حالة من الحالات التالية :

$س + 1 < 2$ ؛ $-س + 3 > 1$ ؛ $\frac{1}{س} < \frac{1}{4}$

10 أ عدد حقيقي حيث : $4 < أ < 6$

1) أوجد حصرا للعدد : $\frac{1}{أ}$ 2) أوجد حصرا للعدد : $2 + أ$

3) استنتج حصرا للعدد : $\frac{أ}{2 + أ}$

• القيمة المطلقة

11 أنجز العمليات التالية :

أ) $|5 - 3| + |4 - 7|$ ؛ $|-3 - 10| + |7 - 10|$

ب) $5 \times |0,2 - 1| - 2 \times |3 - 2,6|$ ؛ $5 \times |0,44 - 1,6| - 3,7$

جـ) $|1 - \frac{5}{3}| + \frac{5}{3}$ ؛ $|5 - \frac{1}{4}| - |\frac{1}{4} - 2|$

د) $3 - 2 \times \left|\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right|$ ؛ $9 \times \left|\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - 1\right| - \left|\frac{3}{2} - 1\right|$

هـ) $|1 - \sqrt{3}| - |5 - 2\sqrt{3}|$ ؛ $3 \times |3 - \sqrt{5}| + |3 - 2\sqrt{5}|$

12 احسب كلا من أ ، ب حيث :

- أ = |2س + 4|
- ب = |2س − 1| − |س − 2|

من أجل :

1) س = 2 ؛ 2) س = −4 ؛ 3) س = $\frac{2}{5}$

4) س = $\sqrt{2}$ ؛ 5) س = $-\sqrt{3}$

13 أكتب بدون رمز القيمة المطلقة

حسب قيم العدد الحقيقي س كلا مما يلي :

أ) |2س + 7| ؛ ب) |$\frac{1}{2}$س − 3|

جـ) |س (س − 2)| ؛ د) |−3س + 4| + |س − 3|

- **إرشاد** : استعمل الجداول لتعيين الإشارات .

14 علما أن : |ك| ≤ α يعني : $-\alpha$ ≤ ك ≤ α

أوجد حصرا للعدد س في كل حالة من الحالات التالية :

أ) |3س| ≤ 1

ب) |س + 2| ≤ 3

جـ) 2|س − 1| ≤ 1

15 بين أنه إذا كان |س − 1| < 1

فإن : س + 1 < 3 .

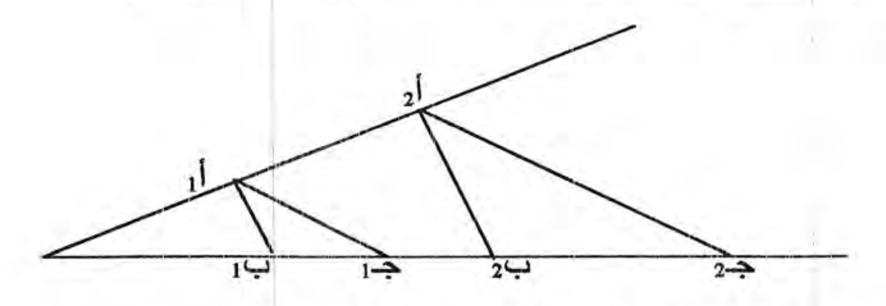
7 النسبة والتناسب

1 . أنشطة تمهيدية

نشاط 1

الجدول التالي يتضمن أطوال أضلاع المثلثين أ$_1$ ب$_1$ جـ$_1$ وَ أ$_2$ ب$_2$ جـ$_2$
(الشكل ـ وحدة الطول هي السنتيمتر)

	أ ب	ب جـ	جـ أ
أطوال أضلاع المثلث أ$_1$ ب$_1$ جـ$_1$	3	5	7
أطوال أضلاع المثلث أ$_2$ ب$_2$ جـ$_2$	6	10	14



تحقق مستعينا بالجدول التالي أنه :
. بضرب كل من : 3 ، 5 ، 7 في 2 نحصل على : 6 ، 10 ، 14
. بقسمة كل من : 6 ، 10 ، 14 على 2 نحصل على : 3 ، 5 ، 7 .

3	5	7
6	10	14

×2 ، ÷2

هل يمكن الحصول على كل من 3 ، 5 ، 7 بضرب كل من 6 ، 10 ، 14 في عدد؟
ما هو هذا العدد ؟
. لاحظ أن : الضرب في 2 يكبّر أضلاع المثلث أ$_1$ ب$_1$ جـ$_1$ مرتين .
القسمة على 2 تصغّر أضلاع المثلث أ$_2$ ب$_2$ جـ$_2$ مرتين .

نشاط 2

الجدول التالي يبين كميات البنزين التي استهلكتها سيارة في مدة ما ، والأسعار المقابلة لها .

الكمية باللتر	12,5	14	18,3	25	32,5
الثمن بالدينار	250	280	366	500	650

. أحسب ثمن اللتر الواحد من البنزين .
هل تغير هذا الثمن خلال تلك المدة ؟.
تحقق أنه :
. بضرب كل من : 12,5 ؛ 14 ؛ 18,3 ؛ 25 ؛ 32,5 في 20
تحصل على : 250 ؛ 280 ؛ 366 ؛ 500 ؛ 650 .
. بقسمة كل من : 250 ؛ 280 ؛ 366 ؛ 500 ؛ 650 على 20
نحصل على : 12,5 ؛ 14 ؛ 18,3 ؛ 25 ؛ 32,5 .
نقول إن : الأعداد : 12,5 ؛ 14 ؛ 18,3 ؛ 25 ؛ 32,5 متناسبة مع الأعداد :
250 ؛ 280 ؛ 366 ؛ 500 ؛ 650 على الترتيب ،
والعدد 20 هو معامل التناسب .
نقول أيضا : الأعداد : 250 ؛ 280 ؛ 366 ؛ 500 ؛ 650 متناسبة مع الأعداد :
12,5 ؛ 14 ؛ 18,3 ؛ 25 ؛ 32,5 على الترتيب والعدد $\frac{1}{20}$ هو معامل التناسب .

1 . الأعداد المتناسبة

تعريف

نقول عن الأعداد الحقيقية غير المعدومة أ ، ب ، جـ المعطاة بهذا الترتيب إنها متناسبة مع الأعداد الحقيقية غير المعدومة أَ ، بَ ، جـَ المعطاة بهذا الترتيب إذا وفقط إذا كان :

$$\frac{أ}{أ'} = \frac{ب}{ب'} = \frac{جـ}{جـ'}$$

. إذا كان : $\frac{أ}{أ'} = \frac{ب}{ب'} = \frac{جـ}{جـ'} = \frac{د}{د'} = ك$ (ك عدد حقيقي غير معدوم)

فإن : أ = ك أَ ؛ ب = ك بَ ؛ جـ = ك جـَ ؛ د = ك دَ

العدد ك يسمى معامل تناسب الأعداد : أ ؛ ب ؛ جـ ؛ د مع الأعداد :
أَ ؛ بَ ؛ جـَ ؛ دَ .

مثال :

. الأعداد : 1 ؛ 3 ؛ 4,5 متناسبة على الترتيب مع الأعداد : 2,5 ؛ 7,5 ؛ 11,25
لأن :

$$\frac{1}{2,5} = 0,4 \quad ؛ \quad \frac{3}{7,5} = 0,4 \quad ؛ \quad \frac{4,5}{11,25} = 0,4$$

أي : $\frac{1}{2,5} = \frac{3}{7,5} = \frac{4,5}{11,25} = 0,4$

العدد 0,4 هو معامل تناسب الأعداد : 1 ؛ 3 ؛ 4,5 مع الأعداد :
2,5 ؛ 7,5 ؛ 11,25 .

. الأعداد : 2,5 ؛ 7,5 ؛ 11,25 متناسبة على الترتيب مع الأعداد : 1 ؛ 3 ؛ 4,5
لأن :

$2,5 = \dfrac{2,5}{1}$ ؛ $2,5 = \dfrac{7,5}{3}$ ؛ $2,5 = \dfrac{11,25}{4,5}$

أي : $\dfrac{2,5}{1} = \dfrac{7,5}{3} = \dfrac{11,25}{4,5} = 2,5$

العدد 2,5 هو معامل تناسب الأعداد : 2,5 ؛ 7,5 ؛ 11,25 مع الأعداد :
1 ؛ 3 ؛ 4,5 .

ملاحظة

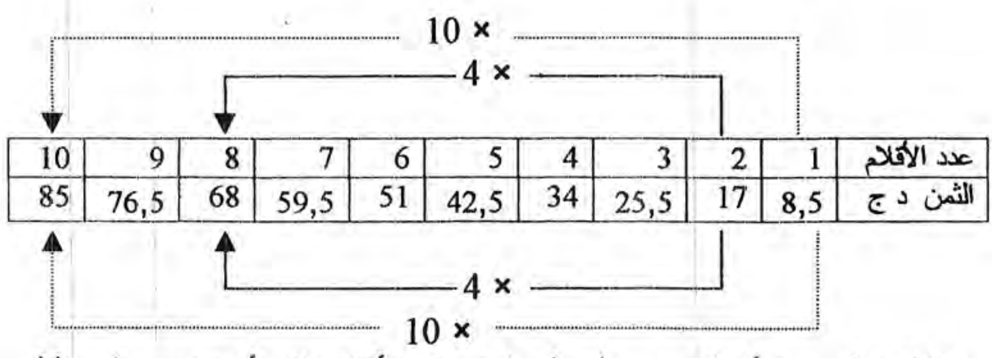
معامل التناسب الأول هو مقلوب معامل التناسب الثاني

لأن : $0,4 = \dfrac{4}{10} = \dfrac{2}{5}$ و $\dfrac{25}{10} = \dfrac{5}{2} = 2,5$

خواص الأعداد المتناسبة

خاصية 1

الجدول التالي يتضمن تناسبا لعدد من الأقلام وأثمانها



عدد الأقلام	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
الثمن د ج	8,5	17	25,5	34	42,5	51	59,5	68	76,5	85

هذا الجدول يبين أنه لكي نحصل على ثمن عشرة أقلام يكفي أن نضرب ثمن القلم الواحد في 10 .

ولكي نحصل على ثمن ثمانية أقلام يكفي أن نضرب ثمن قلمين في 4 :

أي :

$$\frac{8}{68} = \frac{4 \times 2}{4 \times 17} = \frac{2}{17} \quad \text{و} \quad \frac{10}{85} = \frac{10 \times 1}{10 \times 8,5} = \frac{1}{8,5}$$

هذا يعني أنه إذا ضربنا حدّي نسبة بعدد فإن معامل التناسب لا يتغير .
وبصفة عامة لدينا الخاصية التالية :

خاصية 1

إذا كان : $\frac{\text{أ}}{\text{أَ}} = \frac{\text{ب}}{\text{بَ}} = \frac{\text{جـ}}{\text{جـَ}} = \text{ك}$

فإن : $\frac{\text{س أ}}{\text{س أَ}} = \frac{\text{ع ب}}{\text{ع بَ}} = \frac{\text{ص جـ}}{\text{ص جـَ}} = \text{ك}$

مثال :
لتكن الأعداد : 1 ؛ 4 ؛ 6 المتناسبة على الترتيب مع الأعداد : 3 ؛ 12 ؛ 18

أي : $\frac{1}{3} = \frac{4}{12} = \frac{6}{18}$

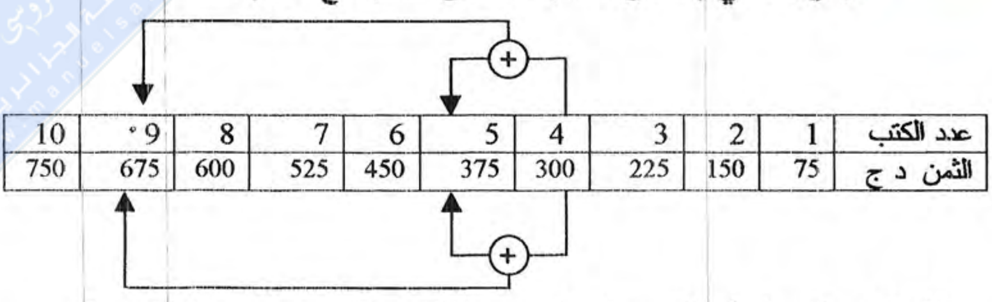
وبضرب حدّي نسبة ما في عدد نحصل على التناسب التالي :

$$\frac{5 \times 6}{5 \times 18} = \frac{3 \times 4}{3 \times 12} = \frac{2 \times 1}{2 \times 3} = \frac{6}{18} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

فالأعداد : 1 ؛ 4 ؛ 6 ؛ 2 ؛ 12 ؛ 30 متناسبة على الترتيب مع الأعداد :
3 ؛ 12 ؛ 18 ؛ 6 ؛ 36 ؛ 90

خاصية 2

الجدول التالي يتضمن تناسب عدد من الكتب مع أثمانها



عدد الكتب	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
الثمن د ج	75	150	225	300	375	450	525	600	675	750

لاحظ في الجدول أنه للحصول على ثمن 9 كتب يكفي جمع ثمن 4 كتب وثمن 5 كتب :

$$\frac{4}{300} = \frac{5}{375} = \frac{5+4}{375+300} = \frac{9}{675}$$

هذا يعني أنه إذا جمعنا بسطي نسبتين وجمعنا مقاميها فإن معامل التناسب لا يتغير .
وبصفة عامة لدينا الخاصية التالية :

خاصية 2

إذا كان : $\frac{\text{أ}}{\text{أَ}} = \frac{\text{ب}}{\text{بَ}} = \frac{\text{جـ}}{\text{جـَ}} = \text{ك}$

فإن : $\frac{\text{أ}}{\text{أَ}} = \frac{\text{ب}}{\text{بَ}} = \frac{\text{جـ}}{\text{جـَ}} = \frac{\text{أ + ب + جـ}}{\text{أَ + بَ + جـَ}}$

مثال :
لتكن الأعداد : 3 ؛ 6 ؛ 15 المتناسبة على الترتيب مع الأعداد :
4 ؛ 8 ؛ 20

أي : $\frac{3}{4} = \frac{6}{8} = \frac{15}{20}$

بجمع بسوط ومقامات بعض النسب نحصل على ما يلي :

$$\frac{3}{4} = \frac{6}{8} = \frac{15}{20} = \frac{6+3}{8+4} = \frac{15+3}{20+4} = \frac{15+6}{20+8} = \frac{15+6+3}{20+8+4}$$

فالأعداد : 3 ؛ 6 ؛ 15 ؛ 9 ؛ 18 ؛ 21 ؛ 24 متناسبة على الترتيب مع الأعداد : 4 ؛ 8 ؛ 20 ؛ 12 ؛ 24 ؛ 28 ؛ 32 .

2 . التناسب

تحقق أن العددين : 3 ؛ 6 متناسبين على الترتيب مع العددين 7,5 ؛ 15

يكون : $\frac{3}{7,5} = \frac{6}{15}$ تساوي النسبتين : $\frac{3}{7,5}$ و $\frac{6}{15}$ يسمى تناسبا ومنه :

تعريف

أ ؛ ب ؛ جـ ؛ د أربعة أعداد غير معدومة معطاة بهذا الترتيب .

تسمى المساواة : $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{جـ}}{\text{د}}$ تناسبا .

. أ هو الحد الأول ؛ ب الحد الثاني
جـ الحد الثالث ؛ د الحد الرابع
. الحدان الأول والرابع يسميان الطرفين
والحدان الثاني والثالث يسميان الوسطين .
. إذا كان ب = جـ فإن ب يسمى الوسط المتناسب ونكتب :

$$\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{ب}}{\text{د}}$$

مثال:

الأعداد : 1,5 ؛ 6 ؛ 2 ؛ 8 بهذا الترتيب تشكل التناسب التالي :

$$\frac{1,5}{6} = \frac{2}{8}$$

بينما الأعداد : 1,5 ؛ 8 ؛ 6 ؛ 2 بهذا الترتيب لا تشكل تناسبا

لأن : $\frac{1,5}{8} \neq \frac{6}{2}$

خواص التناسب

- ليكن التناسب : $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{جـ}}{\text{د}}$ وَ ك معامل التناسب

لدينا : $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \text{ك}$ ؛ $\frac{\text{جـ}}{\text{د}} = \text{ك}$

أي : أ = ب × ك ؛ جـ = د × ك

ومنه : $\frac{\text{أ}}{\text{جـ}} = \frac{\text{ب} \times \text{ك}}{\text{د} \times \text{ك}}$ أي : $\frac{\text{أ}}{\text{جـ}} = \frac{\text{ب}}{\text{د}}$

لاحظ أنه من التناسب $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{جـ}}{\text{د}}$ يمكن الحصول على تناسب آخر بتبديل موضعي الوسطين هو $\frac{\text{أ}}{\text{جـ}} = \frac{\text{ب}}{\text{د}}$

خاصية 1

بتبديل موضعي وسطي تناسب نحصل على تناسب آخر

مثال

ليكن التناسب $\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$

بتبديل موضعي الوسطين 1 ؛ 6 نحصل على تناسب آخر هو : $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$

. ليكن التناسب : $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د}$ وَ ك معامل التناسب

لدينا : أ = ب × ك وَ جـ = د × ك

ب = أ × $\frac{1}{ك}$ وَ د = جـ × $\frac{1}{ك}$

وبالتالي : $\frac{د}{ب} = \frac{جـ \times \frac{1}{ك}}{أ \times \frac{1}{ك}}$ أي : $\frac{د}{ب} = \frac{جـ}{أ}$

لاحظ أنه يمكن الحصول على التناسب $\frac{د}{ب} = \frac{جـ}{أ}$

بتبديل موضعي الطرفين في التناسب $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د}$

خاصية 2

بتبديل موضعي طرفي تناسب نحصل على تناسب آخر

مثال

ليكن التناسب $\frac{5}{7} = \frac{10}{14}$

بتبديل موضعي الطرفين 5 ؛ 14 نحصل على تناسب آخر هو : $\frac{14}{7} = \frac{10}{5}$

. ليكن التناسب : $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د}$ ....(1)

لدينا : $\frac{أ}{ب} = \frac{أ \times د}{ب \times د}$ و $\frac{جـ}{د} = \frac{جـ \times ب}{د \times ب}$

إذن : $\frac{أ \times د}{ب \times د} = \frac{جـ \times ب}{د \times ب}$

ومنه :

أ × د = جـ × ب ....(2)

لاحظ في المساواة (2) أن أ × د هو جداء طرفي التناسب (1) وأن : جـ × ب هو جداء وسطي هذا التناسب .

ومنه الخاصية التالية :

الخاصية 3

في كل تناسب جداء الطرفين يساوي جداء الوسطين أي :

$\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د}$ معناه : أ × د = ب × جـ .

مثـال:

. الأعداد الأربعة : 3 ؛ 4 ؛ 15 ؛ 20 بهذا الترتيب تشكل تناسبا

$\frac{3}{4} = \frac{15}{20}$ لأن : $3 \times 20 = 4 \times 15$

. الأعداد الأربعة : 3 ؛ 2 ؛ 15 ؛ 20 بهذا الترتيب لا تشكل تناسبا

لأن : $3 \times 20 \neq 2 \times 15$

3 . تـطـبـيـقـات

I - التمثيل البياني لأعداد متتالية

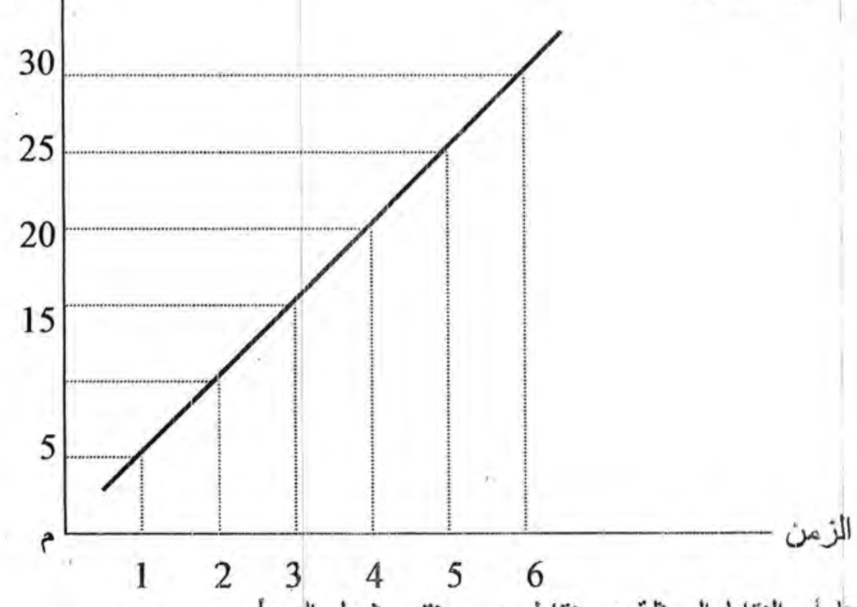
الجدول التالي يمثل المسافات التي يقطعها راجل خلال أزمنة متناسبة معها .

عـدد الساعات	1	2	3	4	5	6
عـدد الكيلومترات	5	10	15	20	25	30

لاحظ أن : $\frac{1}{5} = \frac{2}{10} = \frac{3}{5} = \frac{4}{20} = \frac{5}{25} = \frac{6}{30}$

← ←

لتمثل في معلم متعامد (م ؛ و ؛ ي) صور الثنائيات (س ؛ ع) المبينة في الجدول .



لاحظ أن النقاط الممثلة هي نقاط من مستقيم يشمل المبدأ .

الخلاصة

الأعداد المتناسبة تمثل بنقاط من مستقيم يشمل المبدأ

2 . حساب حدّ من حدود تناسب

لنعين العدد س الذي يحقق التناسب :

$$\frac{24}{0,5} = \frac{36}{س} \qquad ....(1)$$

من (1) نستنتج : 24 × س = 0,5 × 36 (جداء الطرفين يساوي جداء الوسطين)

أي : 24 س = 18 ....(2)

فالعدد س هو حل المعادلة (2)

وبالتالي : $س = \frac{18}{24}$ أي : $س = \frac{3}{4}$

. تعيين حد مجهول من حدود تناسب يؤول إلى حل معادلة من الدرجة الأولى بمجهول واحد .

3 . تعيين وسط متناسب

لنعين العدد س الذي يحقق التناسب : $\frac{9}{س} = \frac{س}{16}$ ....(1)

من (1) نستنتج : 9 × 16 = س × س

أي : $س^2 = 9 \times 16$ ....(2)

الجداء 9 × 16 موجب فالعدد س هو الجذر التربيعي للجداء 9 × 16

أي : $س = \sqrt{9 \times 16}$

$= \sqrt{3^2 \times 4^2}$

س = 3 × 4

س = 12

. الوسط المتناسب هو الجذر التربيعي لجداء الطرفين .

4 . تمارين محلولة

تمرين 1

ليكن التناسب $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{جـ}}{\text{د}}$

1) بين أن الأعداد أ ؛ ب ؛ (6 أ + 5 ب) متناسبة مع الأعداد : جـ ؛ د ؛ (6 جـ + 5 د) .

2) س وَ ع عددان حقيقيان يحققان : $\frac{\text{س}}{6} = \frac{\text{ع}}{7}$ وَ 6 س + 5 ع = 2

أحسب العددين س ، ع باستعمال نتيجة السؤال الأول .

الحل

1) لدينا : $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{جـ}}{\text{د}}$ ....(1)

بتبديل موضعي وسطي (1) نحصل على التناسب $\frac{\text{أ}}{\text{جـ}} = \frac{\text{ب}}{\text{د}}$ ....(2)

بضرب حدي $\frac{\text{أ}}{\text{جـ}}$ في العدد 6 وحدي $\frac{\text{ب}}{\text{د}}$ في العدد 5 نحصل على :

$$\frac{\text{أ}}{\text{جـ}} = \frac{\text{ب}}{\text{د}} = \frac{6\text{أ}}{6\text{جـ}} = \frac{5\text{ب}}{5\text{د}}$$

ومنه : $\frac{\text{أ}}{\text{جـ}} = \frac{\text{ب}}{\text{د}} = \frac{6\text{أ}}{6\text{جـ}} = \frac{5\text{ب}}{5\text{د}} = \frac{6\text{أ} + 5\text{ب}}{6\text{جـ} + 5\text{د}}$

وبالتالي : $\frac{\text{أ}}{\text{جـ}} = \frac{\text{ب}}{\text{د}} = \frac{6\text{أ} + 5\text{ب}}{6\text{جـ} + 5\text{د}}$

فالأعداد : أ ؛ ب ؛ (6 أ + 5 ب) متناسبة مع الأعداد : جـ ؛ د ؛ (6 جـ + 5 د)

تمرين 2

قطعة أرض مثلثة محيطها 108 م .
أطوال أضلاعها متناسبة مع الأعداد : 4 ؛ 5 ؛ 6 .
عين هذه الأطوال .

الحل

ليكن س ؛ ع ؛ ص أطوال الأضلاع بالأمتار فيكون :

س + ع + ص =108

الأعداد : س ؛ ع ؛ ص متناسبة على الترتيب مع الأعداد : 4 ؛ 5 ؛ 6 معناه :

$$\frac{س}{4} = \frac{ع}{5} = \frac{ص}{6} \quad ....(1)$$

باستعمال الخاصية 2 نستنتج من (1) :

$$\frac{س}{4} = \frac{ع}{5} = \frac{ص}{6} = \frac{س + ع + ص}{4 + 5 + 6} = \frac{108}{15} = \frac{36}{5} \quad ....(2)$$

من (2) نحصل على التناسبات التالية :

$$\frac{س}{4} = \frac{36}{5} \quad و \quad \frac{ع}{5} = \frac{36}{5} \quad و \quad \frac{ص}{6} = \frac{36}{5}$$

إذن : $س = \frac{4 \times 36}{5}$ ؛ $ع = \frac{5 \times 36}{5}$ ؛ $ص = \frac{6 \times 36}{5}$

أي : س = 28,8 ؛ ع = 36 ؛ ص = 43,2

فأطوال الأضلاع هي : 28,8 م ؛ 36 م ؛ 43,2 م

تمارين

النسبة

1 أكتب النسب التالية على شكل كسر :

$\dfrac{\frac{4}{5}}{\frac{2}{3}}$ ؛ $\dfrac{\frac{5}{6}+\frac{3}{4}}{\frac{7}{12}}$ ؛ $\dfrac{\frac{3}{4}-\frac{6}{7}}{\frac{7}{12}+\frac{2}{3}}$ ؛ $\dfrac{\frac{2}{5}-8}{0,7}$ ؛ $\dfrac{0,3}{\frac{1}{7}+5}$

2 أ وَ ب عددان حقيقيان .

أكتب النسبة $\frac{\text{أ}}{\text{ب}}$ على شكل كسر عشري في كل من الحالات التالية :

أ = + 15 وَ ب = ـ 5 ؛ أ = ـ 8,75 وَ ب = ـ 5

أ = ـ4 وَ ب = ـ $\frac{5}{12}$ ؛ أ = ـ $\frac{4}{5}$ وَ ب = + $\frac{8}{7}$

أ = ـ12 وَ ب = ـ 3 ؛ أ = ـ 9,6 وَ ب = + $\frac{8}{9}$

أ = ـ12 وَ ب = $\frac{4}{3}$ ؛ أ = + $\frac{9}{8}$ وَ ب = ـ $\frac{3}{4}$

• الأعداد المتناسبة

3 أحسب معامل تناسب الأعداد : ـ10 ؛ 30 ؛ 450 مع الأعداد : 25 ؛ ـ75 ؛ ـ1125 على الترتيب .

4 أحسب معامل تناسب الأعداد : 25 ؛ ـ75 ؛ ـ1125 مع الأعداد :
ـ10 ؛ 30 ؛ 450 على الترتيب .

5 أحسب معامل تناسب الأعداد : 12 ؛ 24 ؛ 36 ؛ 48 ؛ 60 مع الأعداد :
117,6 ؛ 235,2 ؛ 352,8 ؛ 470,4 ؛ 588 على الترتيب .

6 بين أن الأعداد : $\frac{1}{2}$ ؛ $\frac{1}{3}$ ؛ $\frac{1}{4}$ ؛ $\frac{2}{5}$ متناسبة مع الأعداد :
$\frac{3}{2}$ ؛ 1 ؛ $\frac{3}{4}$ ؛ $\frac{6}{5}$ على الترتيب .

7 أتمم جدول التناسب في كل من الحالتين :

أ)

12	...	...	4	2
...	14	9	6,4	...

ب)

...	...	50	25
375	187,5	75	...

8 هل يمثل الجدول الآتي أعدادا متناسبة ؟ :

12	8	6	4	3	2	عدد العلب من الياورت
144	96	66	48	33	22	الثمن بالدينار

9 نفس السؤال السابق بالنسبة إلى أعداد الجدول التالي :

112	108	104	100	96	92	88
56	54	52	50	48	46	44

10

ق$_1$ ؛ ق$_2$ ؛ ق$_3$ ؛ ق$_4$ أربعة أقراص أنصاف أقطارها بالمليمتر هي على الترتيب : 15 ؛ 30 ؛ 60 ؛ 150 .

1) أحسب بالمليمتر المربع : م$_1$ ؛ م$_2$ ؛ م$_3$ ؛ م$_4$ مساحات هذه الأقراص .

2) هل هذه المساحات متناسبة مع أنصاف الأقطار ؟ .

11

لتحضير مربى مشمش نستعمل 0,75 كغ سكر لكل 1 كغ من المشمش.

1) أتمم الجدول التالي :

وزن المشمش بالكيلوغرام	8	15	20
وزن السكر بالكيلوغرام	...	...	...

2) ما هو وزن المشمش بالكيلوغرام الذي تتطلب استعمال 10 كغ سكر ؟ .

12

س ؛ ع ؛ ص ثلاثة أعداد حقيقية متناسبة مع الأعداد : 2 ؛ ـ 3 ؛ 5 .

أحسب كلا من س ؛ ع ؛ ص علما بأن : 4 س ـ ع + 2 ص = 693

(الجواب : س = 66 ؛ ع = ـ 99 ؛ ص = 165)

13

س ؛ ع ؛ ص ثلاثة أعداد حقيقية موجبة متناسبة مع الأعداد الحقيقية الموجبة : أ ؛ ب ؛ جـ بين أن :

$$\frac{س}{أ} = \frac{ع}{ب} = \frac{ص}{جـ} = \frac{\sqrt{س^2 + ع^2 + ص^2}}{\sqrt{أ^2 + ب^2 + جـ^2}}$$

14

مثل في معلم متعامد متجانس للمستوي النقاط التالية :

أ $\left(-\frac{3}{2} ; \frac{3}{4}\right)$ ، ب $\left(1 ; -\frac{1}{2}\right)$ ، جـ $\left(3 ; -\frac{3}{2}\right)$

بين أن هذه النقاط من مستقيم واحد يشمل المبدأ .

15 رتب الأعداد الأربع بحيث تشكل تناسبا في كل من الحالات التالية :

أ) 35 ؛ -49 ؛ -21 ؛ 14

ب) 15 ؛ $3,25$ ؛ -117 ؛ $-7,8$

جـ) $\sqrt{5}$ ؛ $\sqrt{3}$ ؛ $-9\sqrt{5}$ ؛ -15

د) $\sqrt{8}$ ؛ $-\sqrt{3}$ ؛ 12 ؛ $-\sqrt{54}$

16 في كل من الحالات الآتية الأعداد الأربعة المعطاة بهذا الترتيب تشكل تناسبا .

أ) 16 ؛ 8 ؛ -8 ؛ س

ب) س ؛ -64 ؛ $-0,75$ ؛ 2

جـ) 105 ؛ س ؛ -70 ؛ -45

د) $\frac{2}{5}$ ؛ $-\frac{4}{7}$ ؛ -2 ؛ س

عين العدد س في كل حالة .

17 عين الحد المجهول في كل من التناسبات التالية :

أ) $\frac{-3}{5} = \frac{س}{-15}$ ؛ ب) $\frac{-س}{12} = \frac{9}{16}$ ؛ جـ) $\frac{-6}{-2س} = \frac{-7}{15}$

د) $\frac{-2س}{3} = \frac{8}{5}$ ؛ هـ) $\frac{-9}{4} = \frac{5س}{-3}$

18 أحسب في كل حالة ، الرابع المتناسب للأعداد التالية :

أ) 6 ؛ -9 ؛ -8 ؛ ب) $-\frac{2}{3}$ ؛ $-\frac{4}{5}$ ؛ $-\frac{8}{15}$

جـ) $\sqrt{3}$ ؛ $-\sqrt{6}$ ؛ $-\sqrt{2}$.

19 أحسب في كل حالة ، الوسط المتناسب للأعداد التالية :

أ) 3 وَ 27 ؛ ب) 4 وَ 36 ؛ جـ) $\frac{5}{12}$ وَ $\frac{3}{5}$

د) $2\sqrt{3}$ وَ $8\sqrt{3}$

20 س ؛ ع عددان حقيقيان (ع ≠ 0)
عين س ؛ ع في كل من الحالات التالية :

أ) س + ع = 4,2 وَ $\frac{س}{ع} = 5$

ب) س + ع = 40 وَ $\frac{س}{ع} = \frac{2}{3}$

جـ) س + ع = 55 وَ $\frac{س}{ع} = -\frac{9}{4}$

د) س ـ ع = ـ 10 وَ $\frac{س}{ع} = 5$

هـ) س ـ ع = 20 وَ $\frac{س}{ع} = \frac{4}{9}$

و) س ـ ع = ـ 32 وَ $\frac{س}{ع} = -\frac{3}{5}$

21 س وَ ع عددان حقيقيان (ع ≠ 0) حيث :
س × 315 = ع × 168

1) أحسب النسبة $\frac{س}{ع}$ ثم أكتبها على أبسط شكل ممكن .

2) أحسب س و ع في كل من الحالات التالية :

أ) س + ع = 253 ؛ ب) ع ـ س = 126 ؛ جـ) س × ع = 1080

22 نصف قطر القمر هو $\frac{3}{11}$ نصف قطر الأرض .

نصف قطر الشمس هو 108 مرات نصف قطر الأرض .

ما هي نسبة نصف قطر القمر إلى نصف قطر الشمس ؟ .

23 قسّم العدد 3912 إلى أعداد : س ؛ ع ؛ ص ؛ ل متناسبة مع الأعداد :

$\frac{1}{2}$ ؛ $\frac{3}{5}$ ؛ $\frac{2}{7}$ ؛ $\frac{1}{6}$.

24 تقاسم ثلاثة أشخاص مبلغا من المال بحصص متناسبة مع الأعداد :

2 ؛ 3 ؛ 5 .

إذا كانت حصة الثالث تزيد عن حصة الثاني بمبلغ 2400 دج .

فما هو المبلغ المقتسم ؟ .

8 النسب المثلثية

1 . أنشطة تمهيدية

نشاط 1

أ ب جـ مثلث قائم في أ̂ .

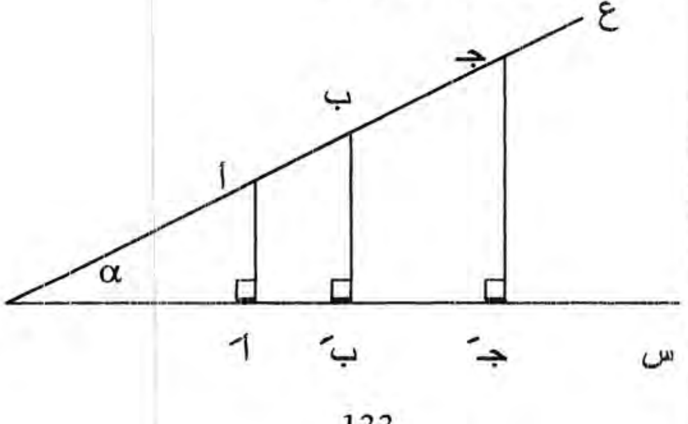
- أذكر عناصر هذا المثلث
  - أضلاعه
  - زواياه
  - رؤوسه
- إذا كانت وحدة قيس الزوايا هي الدرجة فما هو مجموع أقياس زوايا المثلث : أ̂ + ب̂ + جـ̂ .
  - احسب المجموع : ب̂ + جـ̂
  - استنتج أن كلا من الزاويتين ب̂ وَ جـ̂ هي زاوية حادة .
- الضلع [ب جـ] المقابل للزاوية القائمة أ̂ هو وتر المثلث القائم أ ب جـ .
- كل من [أ ب] ؛ [أ جـ] هو ضلع للزاوية القائمة وهو مقابل لزاوية حادة ومجاور للأخرى أي :

[أ ب] يقابل جـ̂ ويجاور ب̂

[جـ أ] يقابل ب̂ ويجاور جـ̂

نشاط 2 : جيب تمام زاوية حادة

[م س ، م ع] زاوية حادة قيسها α .



أ ؛ ب ؛ جـ نقاط من [م ع . مساقطها العمودية على [م س هي :
أَ ؛ بَ ؛ جـَ على الترتيب .

- (أ أَ) // (ب بَ) // (جـ جـَ) . لماذا ؟
- تحقق باستعمال نظرية طالس أن :

$$\frac{\text{م أَ}}{\text{م بَ}} = \frac{\text{م أ}}{\text{م ب}} \quad \text{و} \quad \frac{\text{م أَ}}{\text{م جـَ}} = \frac{\text{م أ}}{\text{م جـ}}$$

استنتج أن : $\frac{\text{م أَ}}{\text{م أ}} = \frac{\text{م بَ}}{\text{م ب}} = \frac{\text{م جـَ}}{\text{م جـ}}$ ....(1)

لاحظ في (1) أن كل نسبة هي على الشكل :

$$\frac{\text{طول المسقط العمودي لقطعة من [م ع على [م س.}}{\text{طول نفس القطعة}}$$

العلاقة (1) تعني أن نسبة طول المسقط العمودي لقطعة من [م ع على [م س إلى طول نفس القطعة هي نسبة ثابتة .

هذه النسبة مستقلة عن القطعة المختارة على [م ع ، ولكنها مرتبطة بالقيس α للزاوية الحادة [م س ، م ع] هذه النسبة الثابتة تسمى جيب تمام العدد α ، أو يقال تجاوزا جيب تمام الزاوية [م س ، م ع] التي قيسها α .

ونرمز إليها بالرمز تجبα

نكتب : تجبα = $\frac{\text{م أَ}}{\text{م أ}} = \frac{\text{م بَ}}{\text{م ب}} = \frac{\text{م جـَ}}{\text{م جـ}}$

2. النسب المثلثية لزاوية حادّة

1) جيب تمام وجيب زاوية حادة

أ ب جـ مثلث قائم في ب ،

θ ؛ α هما قيسا الزاويتين الحادتين $\widehat{أ}$ وَ $\widehat{جـ}$

لاحظ أن [جـ ب] هو المسقط العمودي للوتر [جـ أ] على (ب جـ) حسب النشاط 2 لدينا :

$$\text{تجب}\alpha = \frac{\text{جـ ب}}{\text{جـ أ}} = \frac{\text{طول الضلع المجاور للزاوية جـ}}{\text{طول الوتر}}$$

لاحظ أيضا أن [أ ب] هو المسقط العمودي للوتر [أ جـ] على (أ ب) فيكون :

$$\text{تجب}\theta = \frac{\text{أ ب}}{\text{أ جـ}} = \frac{\text{طول الضلع المجاور للزاوية أ}}{\text{طول الوتر}}$$

بصفة عامة :

جيب تمام زاوية حادة قيسها α من مثلث قائم هو :

$$\text{تجب}\alpha = \frac{\text{طول الضلع المجاور}}{\text{طول الوتر}}$$

. جيب الزاوية الحادة

تعريف

جيب زاوية حادة قيسها α هو جيب تمام الزاوية المتممة لها .

نرمز إلى جيب الزاوية α بالرمز جبα

أ ب جـ مثلث قائم في ب ،

α ، θ هما قيسا الزاويتين الحادتين جـ وَ أ

حسب هذا التعريف لدينا :

جيب الزاوية α هو جيب تمام الزاوية θ المتممة لها ،

أي : جب α = تجب θ

$$= \frac{\text{أ ب}}{\text{أ جـ}} \quad (\text{تعريف تجب } \theta)$$

$$\text{إذن : جب}\alpha = \frac{\text{أ ب}}{\text{أ جـ}} = \frac{\text{طول الضلع المقابل للزاوية جـ}}{\text{طول الوتر}}$$

بصفة عامة :

جيب زاوية حادة قيسها α من مثلث قائم هو :

$$\text{جب}\alpha = \frac{\text{طول الضلع المقابل}}{\text{طول الوتر}}$$

ملاحظة :

إذا كان α هو قيس زاوية حادة في مثلث قائم فإن : تجب $\alpha < 1$ وَ جب $\alpha < 1$ لأن طول الوتر هو مقام هاتين النسبتين والوتر أطول ضلع في المثلث القائم .

مثال :

أ ب جـ مثلث قائم في ب ، أطوال أضلاعه هي : 3 ، 4 ، 5 .

$$\text{لدينا : تجب } \alpha = \frac{\text{جـ ب}}{\text{جـ أ}} \text{ وَ جب } \alpha = \frac{\text{أ ب}}{\text{أ جـ}}$$

$$\text{تجب } \alpha = \frac{4}{5} \text{ وَ جب } \alpha = \frac{3}{5}$$

$$\text{تجب } \theta = \frac{\text{أ ب}}{\text{أ جـ}} \text{ وَ جب } \theta = \frac{\text{جـ ب}}{\text{جـ أ}}$$

$$\text{تجب } \theta = \frac{3}{5} \quad \text{وَ جب } \theta = \frac{4}{5}$$

2) ظل وظل تمام زاوية حادة

. ظل زاوية حادة

تعريف

ظل زاوية حادة قيسها α هو نسبة جب α إلى تجب α

نرمز إلى ظل الزاوية α بالرمز ظلα ونكتب :

$$\text{ظل } \alpha = \frac{\text{جب } \alpha}{\text{تجب } \alpha}$$

د هـ ي مثلث قائم في هـ .

α ؛ θ هما قيسا الزاويتين د ؛ ي .

حسب التعريف لدينا :

$$\text{ظل } \alpha = \frac{\text{جب } \alpha}{\text{تجب } \alpha} = \frac{\frac{\text{ي هـ}}{\text{ي د}}}{\frac{\text{د هـ}}{\text{د ي}}} = \frac{\text{ي هـ}}{\text{د هـ}} = \frac{\text{طول الضلع المقابل للزاوية } \alpha}{\text{طول الضلع المجاور للزاوية } \alpha}$$

بصفة عامة :

ظـل زاوية حادة قيسها α من مثلث قائم هو :

$$\text{ظل}\alpha = \frac{\text{طول الضلع المقابل للزاوية } \alpha}{\text{طول الضلع المجاور للزاوية } \alpha}$$

. ظل تمام زاوية حادة

تعريف

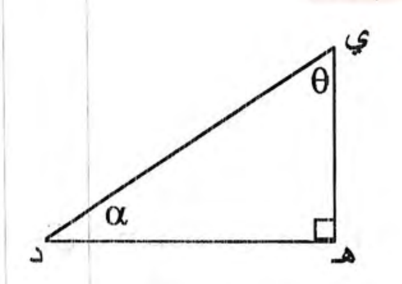
ظل تمام زاوية حادة قيسها α هو مقلوب ظل α

نرمز إلى ظل تمام الزاوية α بالرمز تظلα ونكتب :

$$\text{تظل } \alpha = \frac{1}{\text{ظل } \alpha}$$

ليكن المثلث د هـ ي القائم في هـ .

α ؛ θ هما قيسا الزاويتين د ؛ ي .



حسب التعريف لدينا :

$$\text{تظل } \alpha = \frac{1}{\text{ظل}\alpha} = \frac{1}{\frac{\text{ي هـ}}{\text{د هـ}}} = \frac{\text{د هـ}}{\text{ي هـ}} = \frac{\text{طول الضلع المجاور للزاوية } \alpha}{\text{طول الضلع المقابل للزاوية } \alpha}$$

بصفة عامة :

ظـل تمام زاوية حادة قيسها α من مثلث قائم هو :

$$\text{تظل}\,\alpha = \frac{\text{طول الضلع المجاور للزاوية } \alpha}{\text{طول الضلع المقابل للزاوية } \alpha}$$

ملاحظة :

بما أن ظلα وَ تظلα معرفان بنسبة ضلعي الزاوية القائمة فيمكن أن يكون كل من ظلα وَ تظلα أكبر من 1 .

مثال :

د هـ ي مثلث قائم في هـ ، أطوال أضلاعه (بالسنتمتر) هي : 3 ؛ 4 ؛ 5 .

ي، θ، 5، 3، α، د، هـ، 4

$$\text{ظل}\,\alpha = \frac{\text{ي هـ}}{\text{هـ د}} = \frac{3}{4} \qquad \text{وَ}\quad \text{تظل}\,\alpha = \frac{\text{هـ د}}{\text{هـ ي}} = \frac{4}{3}$$

$$\text{ظل}\,\theta = \frac{\text{هـ د}}{\text{هـ ي}} = \frac{4}{3} \qquad \text{وَ}\quad \text{تظل}\,\theta = \frac{\text{هـ ي}}{\text{هـ د}} = \frac{3}{4}$$

النسب : جب α ؛ تجب α ؛ ظل α ؛ تظل α المتعلقة بالزاوية الحادة α تسمى النسب المثلثية للزاوية α .

3 . تطبيقات

1) قيم النسب المثلثية للزوايا الخاصة

. الزاوية 45°

أ ب جـ مثلث قائم ومتساوي الساقين .

فقيس كل زاوية حادة منه 45° .

إذا كان : أ ب = ب جـ = س فإن :

$أ جـ^2 = ب أ^2 + ب جـ^2$ (نظرية فيثاغورث)

$= س^2 + س^2 = 2 س^2$

ومنه : $أ جـ = س \sqrt{2}$

لنحسب الآن النسب المثلثية التالية :

- $جب 45° = \frac{أ ب}{أ جـ} = \frac{س}{س\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

- $تجب 45° = \frac{جـ ب}{جـ أ} = \frac{س}{س\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

- $ظل 45° = \frac{أ ب}{ب جـ} = \frac{س}{س} = 1$

- $تظل 45° = \frac{ب جـ}{أ ب} = \frac{س}{س} = 1$

$جب 45° = تجب 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$ظل 45° = تظل 45° = 1$

- **الزاويتان 30° و 60°**

أ ب جـ مثلث متقايس الأضلاع طول ضلعه س ،

أي : $\hat{أ} = \hat{ب} = \hat{جـ} = 60°$

(أ هـ) منصف الزاوية أ .

إذن : $\widehat{هـ أ ب} = 30°$

(أ هـ) هو محور للضلع [ب جـ]

أي : $\widehat{أ هـ ب} = 90°$ وَ $هـ ب = \frac{1}{2} س$

المثلث أ هـ ب قائم في هـ وَ $\hat{ب} = 60°$ وَ $\widehat{ب أ هـ} = 30°$

تحقق بتطبيق نظرية فيثاغورث أن : $أ هـ = \frac{\sqrt{3}}{2} س$

لنحسب الآن النسب المثلثية للزاوية 30° :

- $جب 30° = \frac{هـ ب}{أ ب} = \frac{0,5 س}{س} = \frac{1}{2}$

- $تجب 30° = \frac{أ هـ}{أ ب} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

- $ظل 30° = \frac{هـ ب}{أ هـ} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

- $تظل 30° = \frac{أ هـ}{هـ ب} = \sqrt{3}$

جب 30° = $\frac{1}{2}$	ظل 30° = $\frac{\sqrt{3}}{3}$
تجب 30° = $\frac{\sqrt{3}}{2}$	ظل 30° = $\sqrt{3}$

- جب 60° = $\frac{\text{أ هـ}}{\text{أ ب}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$
- تجب 60° = $\frac{\text{ب هـ}}{\text{أ ب}} = \frac{1}{2}$
- ظل 60° = $\frac{\text{أ هـ}}{\text{هـ ب}} = \sqrt{3}$
- تظل 60° = $\frac{\text{ب هـ}}{\text{ب أ}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

جب 60° = $\frac{\sqrt{3}}{2}$	ظل 60° = $\sqrt{3}$
تجب 60° = $\frac{1}{2}$	ظل 60° = $\frac{\sqrt{3}}{3}$

. الزاوية °0

أ ب جـ مثلث قائم في ب ، α زاوية حادة منه :

لدينا : تجب α = $\frac{أ ب}{أ جـ}$ وَ جب α = $\frac{ب جـ}{أ جـ}$

إذا كان : α = 0 تكون النقطة جـ منطبقة على النقطة ب ،

أي : أ جـ = أ ب وَ ب جـ = 0

ومنه : تجب °0 = $\frac{أ ب}{أ ب}$ = 1 وَ جب °0 = $\frac{0}{أ جـ}$ = 0

ظل °0 = $\frac{ب جـ}{أ ب}$ = $\frac{0}{أ ب}$ = 0

تظل °0 = $\frac{أ ب}{ب جـ}$ = $\frac{أ ب}{0}$ غير موجود

جب °0 = 0	ظل °0 = 0
تجب °0 = 1	تظل °0 غير موجود

. الزاوية °90

تجب α = $\frac{جـ ب}{أ جـ}$ ، جب α = $\frac{أ ب}{أ جـ}$

إذا كان α = °90 تكون جـ منطبقة على ب

أ ي : جـ ب = 0 وَ أ ب = أ جـ

ومنه :

$$\text{تجب } 90° = \frac{0}{\text{أ جـ}} = 0 \quad \text{و} \quad \text{جب } 90° = \frac{\text{أ ب}}{\text{أ ب}} = 1$$

$$\text{ظل } 90° = \frac{\text{جب } 90°}{\text{تجب } 90°} = \frac{1}{0} \quad \text{غير موجود}$$

$$\text{تظل } 90° = \frac{\text{تجب } 90°}{\text{جب } 90°} = \frac{0}{1} = 0$$

جب 90° = 1	ظل 90° غير موجود
تجب 90° = 0	تظل 90° = 0

2) العلاقات الأساسية بين جيب و جيب تمام زاوية حادة

أ ب جـ مثلث قائم في ب ، α قيس زاوية حادة منه :

أ
α
ب
جـ

لدينا :

$$\text{تجب } \alpha = \frac{\text{أ ب}}{\text{أ جـ}} \quad \text{أي : أ ب = أ جـ . تجب} \alpha \quad ....(1)$$

$$\text{جب } \alpha = \frac{\text{ب جـ}}{\text{أ جـ}} \quad \text{أي : ب جـ = أ جـ . جب} \alpha \quad ....(2)$$

بالتربيع نجد :

$$\text{أ ب}^2 = \text{أ جـ}^2 . (\text{تجب } \alpha)^2$$

ب جـ^2 = أ جـ^2 . (جب α)^2

وبالجمع نحصل على :

أ ب^2 + ب جـ^2 = أ جـ^2 . (تجب α)^2 + أ جـ^2 . (جب α)^2

= أ جـ^2 . [(تجب α)^2 + (جب α)^2]

ومنه :

(تجب α)^2 + (جب α)^2 = (أ ب^2 + ب جـ^2) / أ جـ^2

= 1 (لأن : أ ب^2 + ب جـ^2 = أ جـ^2)

لتبسيط الكتابة نكتب :

(تجب α)^2 = تجب^2 α ؛ (جب α)^2 = جب^2 α

فيكون :

جب^2 α + تجب^2 α = 1

4 . تمارين محلولة

تمرين 1

أ ب جـ د شبه منحرف قائم في أ وَ د ، حيث :
أ ب = 24 ، د جـ =72 . (وحدة الطول هي السنتيمتر) .
ظل جـ = $\frac{3}{4}$ وليكن هـ هو المسقط العمودي للنقطة ب على (جـ د) .
أحسب كلا من : جب جـ وَ تجب جـ

الحل

24 أ ب 24 د هـ جـ 72

لحساب جب جـ وَ تجب جـ
نحسب أطوال أضلاع المثلث
ب هـ جـ القائم في هـ .

حساب جـ هـ :

أ ب هـ د مستطيل إذن : هـ د = ب أ = 24
ومنه : جـ هـ = جـ د ـ د هـ = 72 ـ 24
= 48

حساب ب هـ :

لدينا : ظل جـ = $\frac{3}{4}$ = $\frac{\text{ب هـ}}{\text{هـ جـ}}$ (من التعريف)

إذن : $\frac{\text{ب هـ}}{\text{هـ جـ}}$ = $\frac{3}{4}$ أي : $\frac{\text{ب هـ}}{48}$ = $\frac{3}{4}$

ومنه : ب هـ = $\frac{3}{4}$ × 48 = 36 أي : ب هـ = 36

حساب ب جـ :

لدينا : ب جـ² = ب هـ² + هـ جـ² (نظرية فيثاغورث)

$$48^2 + 36^2 =$$

$$(8 \times 6)^2 \times (6 \times 6)^2 =$$

$$(8^2 + 6^2) \times 6^2 =$$

$$100 \times 6^2 =$$

$$10^2 \times 6^2 =$$

ومنه : ب جـ = $\sqrt{10^2 \times 6^2}$

$$\sqrt{10^2} \times \sqrt{6^2} =$$

$$10 \times 6 =$$

ب جـ = 60

حساب النسبتين المثلثيتين جب $\widehat{\text{جـ}}$ و تجب $\widehat{\text{جـ}}$

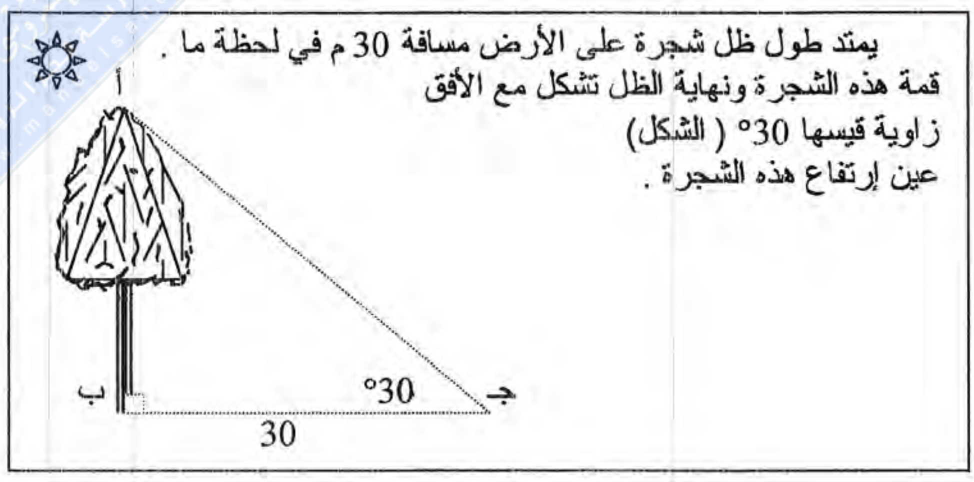
جب $\widehat{\text{جـ}}$ = $\frac{\text{ب هـ}}{\text{ب جـ}} = \frac{36}{60} = \frac{3}{5}$

تجب $\widehat{\text{جـ}}$ = $\frac{\text{هـ جـ}}{\text{ب جـ}} = \frac{48}{60} = \frac{4}{5}$

جب $\widehat{\text{جـ}}$ = $\frac{3}{5}$ و تجب $\widehat{\text{جـ}}$ = $\frac{4}{5}$

تمرين 2

يمتد طول ظل شجرة على الأرض مسافة 30 م في لحظة ما .
قمة هذه الشجرة ونهاية الظل تشكل مع الأفق
زاوية قيسها 30° (الشكل)
عين إرتفاع هذه الشجرة .



أ ب جـ مثلث هو قائم في ب ومنه : $\text{ظل } 30° = \frac{\text{أ ب}}{\text{ب جـ}}$

نعلم أن : $\text{ظل } 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$ وبالتالي : $\frac{\text{أ ب}}{\text{ب جـ}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

إذن : $\text{أ ب} = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ ب جـ}$

ومنه : $\text{أ ب} = \frac{\sqrt{3}}{3} \times 30$ أي : $\text{أ ب} = 10\sqrt{3}$ م

تمارين

إنشاء زاوية حادة بمعلومية إحدى نسبها المثلثية

1 أنشئ الزاوية الحادة [ب أ ؛ ب جـ] حيث : تجب $\widehat{\text{أ ب جـ}} = \frac{3}{4}$

2 أنشئ الزاوية الحادة [د جـ ؛ د هـ] حيث : تجب $\widehat{\text{جـ د هـ}} = \frac{1}{2}$

3 أنشئ الزاوية الحادة [م ك ؛ م ل] حيث : تجب $\widehat{\text{ك م ل}} = \frac{4}{5}$

[illegible] لزاوية حادة

في كل ما يأتي (من 4 إلى 12) أ ب جـ مثلث قائم في أ .
أ ب ؛ أ جـ ؛ ب جـ هي أطوال أضلاعه بالسنتمتر .

$\widehat{\text{أ}}$ ؛ $\widehat{\text{ب}}$ ؛ $\widehat{\text{جـ}}$ هي أقياس زواياه بالدرجات .

4 أ ب = 5 ؛ ب جـ = 13 ـ أحسب : تجب $\widehat{\text{جـ}}$ ؛ جب $\widehat{\text{جـ}}$ ؛ ظل $\widehat{\text{جـ}}$

ـ استنتج : تجب $\widehat{\text{ب}}$ ؛ جب $\widehat{\text{ب}}$ ؛ ظل $\widehat{\text{ب}}$

5 أ ب = 3 ؛ أ جـ = 4 ـ أحسب : تجب $\widehat{\text{ب}}$ ؛ جب $\widehat{\text{ب}}$ ؛ ظل $\widehat{\text{ب}}$

6 أ ب = $\sqrt{2} - 1$ ؛ ب جـ = $\sqrt{2} + 1$

ـ أحسب : تجب $\widehat{\text{جـ}}$ ؛ جب $\widehat{\text{جـ}}$ ؛ ظل $\widehat{\text{جـ}}$

7 أ ب = 20 ؛ ب جـ = 40 ـ أحسب : $\widehat{\text{جـ}}$ ؛ $\widehat{\text{ب}}$

8 ب جـ = 10 ؛ أ جـ = $5\sqrt{3}$

ـ أحسب : $\widehat{\text{جـ}}$ ؛ $\widehat{\text{ب}}$

9 أ ب = 3 ؛ تجب $\widehat{ب}$ = $\frac{3}{5}$

ـ أحسب : أ جـ ؛ ب جـ

10 أ ب = 4,5 ؛ جب $\widehat{ب}$ = $\frac{28}{53}$

ـ أحسب : أ جـ ؛ ب جـ

11 أ ب = 3,5 ؛ ظل $\widehat{ب}$ = 1,02

ـ أحسب : أ جـ و ب جـ

12 ب جـ = 7,2 ؛ تجب $\widehat{جـ}$ = 0,31

ـ أحسب : أ ب ؛ أ جـ

13 ب جـ د مثلث قائم في ب حيث : ب جـ = 12؛ ب د = 5

نمدد الضلع [ب د] إلى نقطة دَ بحيث : د دَ = 4 و د $\in$ [ب دَ] .

1) أحسب : جـ د ؛ جـ دَ .

2) أحسب النسب المثلثية لكل من الزاويتين : $\widehat{ب جـ د}$ ؛ $\widehat{ب جـ دَ}$.

العلاقتان: جب² α + تجب² α = 1 ؛ ظل α = $\frac{جب\ \alpha}{تجب\ \alpha}$ حيث α قيس زاوية حادة .

أحسب فيما يلي نسبتين مثلثيتين للزاوية الحادة α بمعلومية إحدى النسب المثلثية لها

14 تجب α = $\frac{\sqrt{2}}{2}$

أحسب جب α ؛ ظل α

15 تجب α = $\frac{\sqrt{3}}{2}$

أحسب : جب α ؛ ظل α

16 جب $\alpha = \frac{1}{2}$

أحسب تجب α ؛ ظل α

17 جب $\alpha = \frac{3}{5}$

أحسب تجب α ؛ ظل α

18 جب $\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$

أحسب تجب α ؛ ظل α

19 تجب $\alpha = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$

أحسب جب α ؛ ظل α

20 ظل$\alpha = \frac{5}{12}$

أحسب جب α ؛ تجب α

21 ظل$\alpha = \frac{15}{8}$

أحسب : جب α ؛ تجب α

22 جب $\alpha = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$. أحسب تجب α ؛ ظل α

9 مفردات المنطق

1 ـ أنشطة تمهيدية

لتكن الجمل الرياضية التالية :

(1) : $1 + 1 = 2$

(2) : π ∌ ك

(3) : $2 + 3 = 4$

(4) : $-1 < 0$

(5) : س ∈ ط ، س ـ 1 = 12

(6) : س ∈ ط ، ع ∈ ط : س ≥ ع

(7) : من أجل كل عددين طبيعيين س و ع : س + ع = ع + س

(8) : يوجد على الأقل عددا طبيعيا س بحيث : س + 5 = 2 .

. لاحظ أن :

ـ هذه الجمل تتركب من كلمات ورموز محددة المعنى .

ـ كل من هذه الجمل تعبر عن معنى رياضي محدد .

. تحقق أنه : كل من (1) ؛ (2) ؛ (7) لها معنى رياضي صحيح ، بينما كل من (3) ؛ (4) ؛ لها معنى رياضي خاطئ .

العبارتان : (5) ؛ (6) لا يمكن الحكم عليهما بالصحة أو الخطأ .

. كل عبارة يمكننا الحكم عليها إما بالصحة أو بالخطأ تسمى **قضية** .

. كل عبارة لا يمكننا الحكم عليها بالصحة أو بالخطأ ليست قضية .

2 ـ مفردات المنطق

1) القضايا

تعريف

نسمي قضية كل جملة يمكن الحكم عليها إما بالصحة وإما بالخطأ .

أمثلة :

" $2^3 = 8$ " وَ " $5 > 7$ " قضيتان صحيحتان .

" $3 > 0$ " وَ " 14 عدد أولي " هما قضيتان خاطئتان .

" $س + 4 \neq 0$ " ليست قضية لأنه لا يمكن الحكم عليها بالصحة أو بالخطأ .

نرمز إلى كل قضية بحرف مثل : ق ، ك ، ل ، . . .

كل قضية صحيحة ترفق بالرمز 1 ، وكل قضية خاطئة ترفق بالرمز 0 .

. كل من 1 ، 0 هو قيمة الحقيقة للقضية .

2) الروابط المنطقية :

ندرس فيما يلي بعض الأدوات التي تسمح بإيجاد قضايا جديدة .

نفي قضية

تعريف

ق قضية

نفي القضية ق هي القضية التي نرمز إليها بالرمز $\overline{ق}$. تكون $\overline{ق}$ صحيحة إذا كانت ق خاطئة وتكون $\overline{ق}$ خاطئة إذا كانت ق صحيحة .

الجدول الآتي هو جدول الحقيقة للقضية $\overline{ق}$:

ق	$\overline{ق}$
1	0
0	1

أمثلة

. نفي القضية الصحيحة " $2 + 2 = 4$ " هو القضية الخاطئة " $2 + 2 \neq 4$ "
. نفي القضية الخاطئة " $5 < 3$ " هو القضية الصحيحة " $3 \leq 5$ "
. نفي القضية الصحيحة " 10 يقبل القسمة على 5 " هو القضية الخاطئة :
" 10 لا يقبل القسمة على 5 "
. نفي القضية الخاطئة " 1 عدد أولي " هو القضية الصحيحة " 1 ليس عددا أوليا".

الـوصـل

تـعـريـف

وصل قضيتين ق ، ك هو قضية لا تكون صحيحة إلا إذا كانت ق وَ ك صحيحتين معا .

نرمز إلى وصل قضيتين ق ، ك بالرمز : ق ∧ ك وتقرأ (ق وَ ك)
الجدول الآتي هو جدول الحقيقة للقضية ق ∧ ك :

ق	ك	ق ∧ ك
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

أمثلة :

. القضية [$(3 > 5) \wedge (2 + 2 \neq 4)$] خاطئة
. القضية [$(2 = 1 + 1) \wedge$ (كل مربع هو مستطيل)] صحيحة

الـفصـل

تـعـريـف

فصل قضيتين ق ، ك هو قضية لا تكون خاطئة إلا إذا كانت ق وَ ك خاطئتين معا .

نرمز إلى فصل قضيتين ق ، ك بالرمز : ق ∨ ك وتقرأ (ق أو ك)
الجدول الآتي هو جدول الحقيقة للقضية ق ∨ ك :

ق	ك	ق ∨ ك
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

أمثلة :

. القضية [(5 عدد أولي) ∨ (4 عدد زوجي)] صحيحة
. القضية [(5 عدد أولي) ∨ (4 عدد فردي)] صحيحة
. القضية [(4 عدد أولي) ∨ (5 عدد زوجي)] خاطئة

الاستلزام

تعريف

ق ، ك قضيتان
نسمي القضية $\overline{\text{ق}}$ ∨ ك استلزاما .

نرمز إلى الاستلزام $\overline{\text{ق}}$ ∨ ك بالرمز : ق ⇐ ك .
ونقرأ :
ـ إذا كان ق فإن ك
أو أيضا : ق يستلزم ك
الجدول الآتي هو جدول الحقيقة للاستلزام (ق ⇐ ك)

ق	ك	$\overline{\text{ق}}$	$\overline{\text{ق}}$ ∨ ك
1	1	0	1
1	0	0	0
0	1	1	1
0	0	1	1

ملاحظة : لا يكون الاستلزام (ق ⇐ ك) خاطئا إلا إذا كانت القضية الأولى صحيحة والقضية الثانية خاطئة .
تسمى القضية ق مقدمة الاستلزام ، وتسمى القضية ك نتيجة الاستلزام .

أمثلة :

$[(2^1 = 2) \Rightarrow (2^2 = 4)]$ قضية صحيحة

$[(-2 > 1) \Rightarrow (1 < 1)]$ قضية خاطئة

[(مدينة البليدة هي عاصمة الجزائر) ⇐ (تقع مدينة البليدة شرق مدينة قسنطينة)] قضية صحيحة .

التكافؤ المنطقي

تعريف

ق ، ك قضيتان

التكافؤ المنطقي للقضيتين ق ، ك هو القضية :

[(ق ⇐ ك) ∧ (ك ⇐ ق)] .

نرمز إلى التكافؤ المنطقي للقضيتين ق ، ك بالرمز : ق ⇔ ك .

ونقرأ :

ق يكافئ منطقيا ك

و يقرأ أيضا : ق إذا وفقط إذا ك

الجدول الآتي هو جدول الحقيقة للتكافؤ (ق ⇔ ك)

ق	ك	ق ⇐ ك	ك ⇐ ق	ق ⇔ ك
1	1	1	1	1
1	0	0	1	0
0	1	1	0	0
0	0	1	1	1

لا يكون التكافؤ المنطقي ق ⇔ ك صحيحا إلا إذا كانت ق و َك صحيحتين معا أو خاطئتين معا .

أمثلة :

(5 عدد أولي) ⇔ (4 عدد زوجي) قضية صحيحة .

صحيحة صحيحة

(5 عدد زوجي) ⇔ (4 عدد أولي) قضية صحيحة .

خاطئة خاطئة

. $(2^2 = 5) \Leftrightarrow (3^2 = 9)$ قضية خاطئة

خاطئة   صحيحة

. (عدد أيام الأسبوع 7) ⇔ (الدائرة هي مربع) قضية خاطئة

صحيحة   خاطئة

نفي الوصل

لندرس جدول الحقيقة للقضيتين : $\overline{\text{ق} \wedge \text{ك}}$ وَ $\overline{\text{ق}} \vee \overline{\text{ك}}$

ق	ك	$\overline{\text{ق}}$	$\overline{\text{ك}}$	ق ∧ ك	$\overline{\text{ق} \wedge \text{ك}}$	$\overline{\text{ق}} \vee \overline{\text{ك}}$
1	1	0	0	1	0	0
1	0	0	1	0	1	1
0	1	1	0	0	1	1
0	0	1	1	0	1	1

هذا الجدول يبين أن القضيتين : $\overline{\text{ق} \wedge \text{ك}}$ وَ $\overline{\text{ق}} \vee \overline{\text{ك}}$ نفس جدول الحقيقة .
أي لهما نفس القيمة .

مثال : نفي القضية $[(2 + 2 \neq 4) \wedge (5 > 3)]$ هو القضية :

$[\overline{(2 + 2 \neq 4)} \vee \overline{(5 > 3)}]$ أي $[(2 + 2 = 4) \vee (5 \leq 3)]$

نفي الفصل

لندرس جدول الحقيقة للقضيتين : $\overline{\text{ق} \vee \text{ك}}$ وَ $\overline{\text{ق}} \wedge \overline{\text{ك}}$

ق	ك	$\overline{\text{ق}}$	$\overline{\text{ك}}$	ق ∨ ك	$\overline{\text{ق} \vee \text{ك}}$	$\overline{\text{ق}} \wedge \overline{\text{ك}}$
1	1	0	0	1	0	0
1	0	0	1	1	0	0
0	1	1	0	1	0	0
0	0	1	1	0	1	1

هذا الجدول يبين أن القضيتين : $\overline{\text{ق} \vee \text{ك}}$ وَ $\overline{\text{ق}} \wedge \overline{\text{ك}}$ نفس جدول الحقيقة .
أي لهما نفس القيمة .
مثال : نفي القضية [(5 عدد أولي) ∨ (4 عدد زوجي)] هو القضية :

[$\overline{\text{(5 عدد أولي)}}$ ∧ $\overline{\text{(4 عدد زوجي)}}$] أي [(5 غير أولي) ∧ (4 عدد فردي)]

3) الجمل المفتوحة

لتكن العبارات التالية :
(1) " س عدد طبيعي : س + 3 = 12 "
(2) " س ، ع عددان طبيعيان : س ≤ ع "
كل من (1) وَ (2) ليست قضية . لماذا ؟ .
. تحقق أنه من أجل س = 9 (1) تصبح قضية صحيحة
ومن أجل س= 0 . (1) تصبح قضية خاطئة .
. تحقق كذلك أنه :
ـ من أجل س = ـ 2 وَ ع = 3 (2) تصبح قضية صحيحة
ـ من أجل س = 5 وَ ع = 0 (2) تصبح قضية خاطئة .
فكل من (1) وَ (2) تصبح قضية بعد تعويض س وَ ع بقيم عددية .
كل من (1) وَ (2) تسمى جملة مفتوحة في المجموعة ط
ومنه :
تعريف

الجملة المفتوحة المعرفة في مجموعة س ، هي جملة تشمل متغيرا أو أكثر من س ، و تصبح قضية إذا عوضنا كلا من متغيراتها بقيم من المجموعة س.

نرمز إلى كل جملة مفتوحة ذات متغير س من مجموعة **س** بالرمز :
ق(س) أو ك(س) أو . . . .
نرمز إلى كل جملة مفتوحة ذات متغيرين س ، ع من مجموعة **س** بالرمز :
ق(س ، ع) أو ك(س ، ع) أو . . . .

4) المكممات

نقدم فيما يلي : أداتين تحولان جملة مفتوحة إلى قضية .

المكمم الكلي " ∀ "

لتكن الجملة المفتوحة :

ق(س) : " س ∋ ح : $س^2$ – س = س (س – 1) "

لاحظ أن الطرف الأول هو نشر الطرف الثاني وأن الطرف الثاني هو تحليل الطرف الأول إلى عاملين .

فالمساواة : $س^2$ – س = س (س – 1) محققة من أجل كل عدد حقيقي س

إذن تصبح الجملة المفتوحة ق(س) قضية صحيحة من أجل كل عدد حقيقي س .

نعبر عن ذلك بالقول :

مهما يكن العدد الحقيقي س فإن : $س^2$ – س = س (س – 1)

ونكتب :

∀ س ∋ ح : $س^2$ – س = س (س – 1)

يسمى الرمز ∀ المكمم الكلي .

ويقرأ " مهما يكن " أو " من أجل كل "

الجملة المفتوحة المكممة بالمكمم الكلي تصبح قضية .

المكمم الوجودي " E "

لتكن الجملة المفتوحة :

ك(س) : " س ∋ ح ؛ $س^2$ – 1 = 0 "

لاحظ أن المساواة : $س^2$ – 1 = 0 محققة من أجل القيمتين 1 و – 1 .

فالجملة المفتوحة ك(س) تصبح قضية صحيحة من أجل قيمة واحدة على الأقل للمتغير س .

نعبر عن ذلك بالقول :

يوجد على الأقل عدد حقيقي س بحيث : $س^2$ – 1 = 0

ونكتب :

E س ∋ ح : $س^2$ – 1 = 0

يسمى الرمز E المكمم الوجودي ويقرأ :

" يوجد على الأقل "

الجملة المفتوحة المكممة بالمكمم الوجودي تصبح قضية .

نفي قضية تشمل مكمما

الجملتان " كل تلاميذ القسم نجباء " .....(1)

وَ " بعض تلاميذ القسم غير نجباء " .....(2)

هما قضيتان كل واحدة منهما نفي للأخرى .

لتكن مـج هي مجموعة تلاميذ القسم

ق(س) هي الجملة المفتوحة " س تلميذ نجيب "

القضية (1) تكتب على الشكل : ∀ س ∈ مـج : ق(س)

القضية (2) تكتب على الشكل : ∃ س ∈ مـج : $\overline{ق(س)}$

لاحظ أننا حصلنا على نفي (1) بتبديل الرمز ∀ بالرمز ∃ و ق(س) بنفييها $\overline{ق(س)}$.

بصفة عامة

> لإيجاد نفي قضية تشمل مكمما نبدل كلا من المكممين ∀ وَ ∃ بالآخر وننفي الجملة المفتوحة التي تلي المكمم .

مثال :

. ق(س) : ∀ س ∈ **ط** : س زوجي .

$\overline{ق(س)}$: ∃ س ∈ **ط** : س فردي

ك(س) : ∃ س ∈ **ط** : س + 1 > 1

$\overline{ك(س)}$: ∀ س ∈ **ط** : س + 1 ≤ 1

3 ـ تطبيقات

. القضايا البينة

ق ، ك قضيتان . لندرس جدول الحقيقة للقضية :

(ق ∧ ك) ⇔ (ك ∧ ق)

لدينا :

ق	ك	ق ∧ ك	ك ∧ ق	(ق ∧ ك) ⇔ (ك ∧ ق)
1	1	1	1	1
1	0	0	0	1
0	1	0	0	1
0	0	0	0	1

لاحظ أن : (ق ∧ ك) ؛ (ك ∧ ق) لهما نفس جدول الحقيقة .

نقول إن الوصل تبديلي .

لاحظ أن القضية [(ق ∧ ك) ⇔(ك ∧ ق)] هي قضية صحيحة مهما كانت ق وَ ك.

نقول إن : [(ق ∧ ك) ⇔(ك ∧ ق)] هي قضية بيّنة .

. توجد قضايا بينة أخرى مثل : [(ق ∨ ك) ⇔(ك ∨ ق)] .

العكس النقيض لاستلزام

ق ، ك قضيتان .

لندرس جدول الحقيقة لكل من (ق ⇒ ك) وَ ($\overline{\text{ك}}$ ⇒ $\overline{\text{ق}}$)

لدينا :

ق	ك	$\overline{\text{ق}}$	$\overline{\text{ك}}$	ق ⇒ ك	$\overline{\text{ك}}$ ⇒ $\overline{\text{ق}}$
1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1
0	0	1	1	1	1

الجدول يبين أن للقضيتين (ق ⇒ ك) وَ ($\overline{\text{ك}}$ ⇒ $\overline{\text{ق}}$) نفس جدول الحقيقة ، فهما متكافئتان .

يسمى الاستلزام ($\overline{\text{ك}}$ ⇒ $\overline{\text{ق}}$) العكس النقيض للاستلزام (ق ⇒ ك) .

نكتب : (ق ⇒ ك) ⇔ ($\overline{\text{ك}}$ ⇒ $\overline{\text{ق}}$)

4 - تمارين محلولة

تمرين 1

ق ، ك قضيتان .
بين باستعمال جدول الحقيقة أن : [ق ⇐ (ق ∨ ك)] هي قضية صحيحة مهما كانت القضيتان ق وَ ك .

الحل

لدينا :

ق	ك	ق ∨ ك	ق ⇐ (ك ∨ ق)
1	1	1	1
1	0	1	1
0	1	1	1
0	0	0	1

يبين الجدول أن القضية [ق ⇐ (ك ∨ ق)]
هي قضية صحيحة مهما كانت ق وَ ك .

تمرين 2

ن عدد طبيعي .
أثبت صحة الاستلزام :

(ن فردي) ⇐ ($ن^2$ فردي)

الحل

لإثبات صحة هذا الاستلزام يكفي أن نفرض أن القضية (ن فردي) صحيحة ، ونبرهن على أن القضية (ن^2 فردي) صحيحة .

ليكن ن عددا طبيعيا فرديا :

إذن : ن = 2ك + 1 حيث ك طبيعي .

فيكون : ن^2 = (2ك + 1)^2

= 4ك^2 + 4ك + 1

= 2 (2ك^2 + 2ك) + 1

ن^2 = 2ك' + 1 (بوضع : ك' = 2 ك^2 + 2ك)

إذن : ن^2 فردي وبالتالي الاستلزام (ن فردي) ⇐ (ن^2 فردي) صحيح .

تمارين

. القضايا

1 من بين الجمل التالية ، عين التي تمثل قضية .

1) المثلث المتقايس الأضلاع هو مثلث متساوي الساقين .
2) منصف زاوية الرأس في مثلث متساوي الساقين هو محور القاعدة .
3) 2 وَ 3 عددان أوليان فيما بينهما .
4) س عدد حقيقي موجب .
5) الرباعي أ ب جـ د هو مربع .
6) $\left(2^{5}\right)^{3} = 2^{15}$
7) $\left(3^{2}\right)^{5} = 3^{7}$
8) $3^{2} + 4^{2} = 5^{2}$

2 لتكن القضيتان :

ق : " 4 مضاعف 2 "

ك : " 4 مضاعف 3 "

عبر لغويا عن القضايا الآتية ، ثم أذكر الصحيحة منها والخاطئة .

ق̅ ؛ ق ∧ ك ؛ ق ∨ ك ؛ ق ⇐ ك ؛ ك ⇐ ق ؛ ق ⇔ ك .

3 بين باستعمال جداول الحقيقة أن القضايا الآتية صحيحة مهما كانت القضيتان ق وَ ك :

ق ⇐ (ق ∧ ك) ؛ ق ⇐ (ك ⇐ ق) ؛ (ق ∧ ك) ⇐ ق

4 ق ؛ ك ؛ ل ثلاث قضايا :

أذكري نفي كل من القضايا التالية :

(ق ∧ ك) ∨ ل ؛ (ق ∧ ك) ∨ ل ؛ (ق ⇐ ك) ∧ ل ؛ ق ⇐ (ك ∧ ل)

الجمل المفتوحة والمكممات

5 ق(س) ؛ ك(س) ؛ ل(س) ثلاث جمل مفتوحة معرفة على مجموعة الأعداد الحقيقية ح حيث :
ق(س) : س < 6
ك(س) : س > 2
ل(س) : س ≤ 4

عبر عن كل من الجمل المفتوحة المركبة التالية بمجالات : ق(س) ∧ ك(س) ؛ ق(س) ∨ ك(س) ؛ [ق(س) ∧ ك(س)] ∨ ل(س) ؛ [ق(س) ∨ ك(س)] ∧ ل(س)

6 م مجموعة مثلثات المستوي .
لتكن الجملة المفتوحة ق (س) : " س مثلث متساوي الساقين " المعرفة على م

1) عبر باستعمال المكممات عن كل من القضايا التالية :
(1) كل المثلثات متساوية الساقين .
(2) كل المثلثات ليست متساوية الساقين .
(3) أي مثلث ليس متساوي الساقين .
(4) أي مثلث ليس غير متساوي الساقين .
(5) هناك على الأقل مثلث متساوي الساقين .
(6) هناك على الأقل مثلث غير متساوي الساقين .

2) عبر عن نفي كل واحدة من القضايا السابقة .

7 ص مجموعة الأعداد الصحيحة .
ص* مجموعة الأعداد الصحيحة غير المعدومة .
ك هي مجموعة الأعداد الناطقة .
بين صحة أو خطأ كل من القضايا التالية . ثم عبر عن نفي كل منها .

(1) ∀س ∈ ص : $س^2 > 0$

(2) ∀س ∈ ص : س ≠ 0

(3) ∀س ∈ ص* : $\frac{1}{س}$ ∈ ص

(4) ∀ س ∈ ص* : $0 < س^{2}$

(5) ∀ س ∈ ص : $\frac{3س - 5}{2س + 2}$ ∈ ك

(6) ∀ س ∈ ص : $\frac{3س + 5}{س^{2} + 4}$ ∈ ك

(7) ∃ س ∈ ص : $0 < س^{2}$

(8) ∃ س ∈ ك : $0 \neq س$

(9) ∃ س ∈ ص* : $2515 < س$

(10) ∃ س ∈ ص : $0 > س^{2}$

(11) ∃ س ∈ ص : $0 \leq 7 - س^{2} -$

8 ص هي مجموعة الأعداد الصحيحة .
بين صحة أو خطأ كل من القضايا التالية ، ثم عبر عن نفي كل منها .

(1) ∃ س ∈ ص ، ∀ ع ∈ ص : $0 < ع^{2} + س^{2}$

(2) ∀ س ∈ ص ، ∀ ع ∈ ص : $0 \leq ع^{2} + س^{2}$

(3) ∀ س ∈ ص ، ∃ ع ∈ ص : $0 = ع\,س$

(4) ∀ س ∈ ص ، ∀ ع ∈ ص : $0 \neq ع\,س$

(5) ∃ س ∈ ص ، ∃ ع ∈ ص : $0 \neq ع\,س$

(6) ∀ س ∈ ص ، ∃ ع ∈ ص : $ع = 5س$

10 المجموعات

1 - أنشطة تمهيدية

نشاط 1 :

س عدد صحيح .

ق(س) : $-2 \leq$ س $\leq 2 +$ جملة مفتوحة معرفة في **ص** .

ـ ما هي قيمة كل من القضايا : ق (1) ، ق (2) ، ق (0) ، ق (3) ، ق(-4) ؟

ـ هل كل من ق(½) وَ ق($\sqrt{2}$) قضية معرفة في **ص** ؟ .

ـ لتكن ل هي قائمة الأعداد الصحيحة س بحيث تصبح ق(س) قضية صحيحة .
عين ل .

المجموعة ل هي مجموعة الأعداد الصحيحة التي تجعل الجملة المفتوحة ق(س) قضية صحيحة في **ص** .

نكتب : ل = { س ∈ **ص** : ق(س) صحيحة } .
ق(س) تسمى الخاصية المميزة للمجموعة ل . المجموعة ل هي جزء من **ص**
ونكتب ل ⊂ **ص** ونقرأ :
" المجموعة ل محتواة في المجموعة **ص** "

نشاط 2 :

ق(س) وَ ك(س) جملتان مفتوحتان حيث :

ق(س) : [س عدد طبيعي أولي وَ س ≤ 13]

ك(س) : [س عدد طبيعي فردي وَ س ≤ 13]

أ وَ ب هما المجموعتان :

أ = { س ∈ ط ، ق(س) } ، ب = { س ∈ ط ، ك(س) }

. عين عناصر كل من أ وَ ب .

. عين المجموعتين : أَ ، بَ حيث :

أَ = { س ∈ ط ، ق(س) $\wedge$ ك(س) }

بَ = { س ∈ ط ، ق(س) $\vee$ ك(س) }

لاحظ أن : أَ هي مجموعة العناصر المشتركة بين أ وَ ب ، وأن بَ هي مجموعة العناصر المشتركة وغير المشتركة بين أ وَ ب .

أَ هي تقاطع أ وَ ب ونرمز إليها بالرمز : أَ = أ $\cap$ ب

بَ هي إتحاد أ وَ ب ونرمز إليها بالرمز : بَ = أ $\cup$ ب

كل من $\cap$ وَ $\cup$ هو رمز لعملية على المجموعات لاحظ التوافق بين الوصل والتقاطع من جهة والتوافق بين الفصل والاتحاد من جهة أخرى .

2 . العمليات على المجموعات

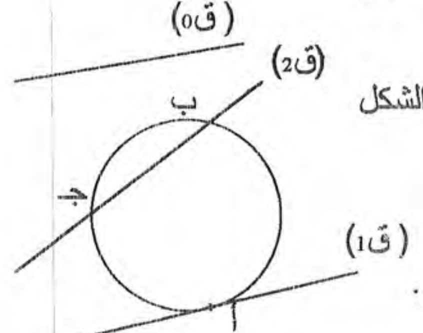
1) التقاطع

تعريف

> تقاطع المجموعتين ك وَ ل هو مجموعة العناصر المشتركة بين ك وَ ل .

تكون صياغة هذا التعريف باستعمال الوصل كما يلي :

ك ∩ ل = { س / (س ∈ ك) ∧ (س ∈ ل) }



مثال : (د) دائرة

(ق$_0$) ، (ق$_1$) ، (ق$_2$) مستقيمات كما في الشكل

لدينا : (د) ∩ (ق$_1$) = { أ }

(د) ∩ (ق$_2$) = { ب ، جـ }

(د) ∩ (ق$_0$) = ∅

نقول إن (د) وَ (ق$_0$) مجموعتان منفصلتان .

2) الإتحاد

تعريف

> اتحاد المجموعتين ك وَ ل هو مجموعة العناصر المشتركة وغير المشتركة بينهما .

تكون صياغة هذا التعريف باستعمال الفصل كما يلي :

ك ∪ ل = { س / (س ∈ ك) ∨ (س ∈ ل) }

مثال : لتكن س وَ ع هما مجموعتا الأعداد الطبيعية الفردية والأعداد الطبيعية الزوجية على الترتيب لدينا :

س ∪ ع = ط

3) المتممة

تعريف

أ مجموعة جزئية من مجموعة سـ .
متممة أ إلى سـ هي مجموعة عناصر س التي لا تنتمي إلى أ

نرمز إلى متممة أ إلى سـ بالرمز ت‌سـ أ

وتكون صياغة هذا التعريف كالتالي :
ت‌سـ أ = { س / (س ∈ سـ) ∧ (س ∉ أ) }

مثال :
لتكن سـ هي مجموعة الأعداد الطبيعية الفردية
ت‌ط سـ = { س / (س ∈ ط) ∧ (س ∉ سـ) }

أي : ت‌ط سـ = { س / (س ∈ ط) ∧ (س زوجي) }

إذن : ت‌ط سـ هي مجموعة الأعداد الطبيعية الزوجية .

4) فرق مجموعتين

تعريف

فرق المجموعتين ك وَ ل بهذا الترتيب ، هو مجموعة العناصر التي تنتمي إلى ك ولا تنتمي إلى ل .

نرمز إلى فرق المجموعتين ك وَ ل بهذا الترتيب بالرمز ك ــ ل .
ونكتب : ك ــ ل = { س / (س ∈ ك) ∧ (س ∉ ك) }

مثال : ك = { 0 ؛ 1 ؛ 2 ؛ 3 ؛ 4 ؛ 5 } ، ل = { 1 ؛ 3 ؛ 5 ؛ 7 }
لدينا : . ك ــ ل = { 0 ؛ 2 ؛ 4 }
. ل ــ ك = { 7 }

5) مجموعة أجزاء مجموعة

لتكن المجموعة س = { أ ؛ ب ؛ جـ }

نعلم أن المجموعة الخالية ∅ هي جزء من أي مجموعة .

لا حظ أن :

. المجموعات ذات عنصر واحد من س هي : { أ } ، { ب } ، { جـ } .

. المجموعات ذات عنصرين من س هي : { أ ؛ ب } ، { أ ؛ جـ } ، { ب ؛ جـ } .

. المجموعات ذات ثلاث عناصر من س هي : { أ ؛ ب ؛ جـ }

هذه المجموعات تشكل مجموعة تسمى مجموعة أجزاء س نرمز إليها بالرمز ج(س) ونكتب :

ج(س) = {∅،{ أ }،{ ب }،{ جـ}،{ أ ؛ ب}،{ أ ؛ جـ}،{ ب ؛ جـ }،{ أ ؛ ب ؛ جـ }}

3 - تطبيقات

1) توزيع كل من الاتحاد والتقاطع على الآخر

لتكن المجموعات :

أ = { 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5 } ، ب = { 3 ، 4 ، 6 } ، جـ = { 0 ، 1 ، 2 }

ولنقارن بين المجموعتين : (أ ∪ ب) ∩ جـ وَ (أ ∩ جـ) ∪ (ب ∩ جـ)

لدينا : أ ∪ ب = { 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5 ، 6 }

(أ ∪ ب) ∩ جـ = { 1 ، 2 } .... (1)

أ ∩ جـ = { 1 ، 2 }

ب ∩ جـ = ∅

(أ ∩ جـ) ∪ (ب ∩ جـ) = { 1 ، 2 } ∪ ∅

= { 1 ، 2 } .... (2)

من (1) وَ (2) نستنتج أن : (أ ∪ ب) ∩ جـ = (أ ∩ جـ) ∪ (ب ∩ جـ)

تحقق بطريقة مماثلة أن :

(أ ∩ ب) ∪ جـ = (أ ∪ جـ) ∩ (ب ∪ جـ)

كل من الاتحاد والتقاطع توزيعي على الآخر .

2) متممتا الاتحاد والتقاطع

لتكن المجموعات :

س = { 1 ، 2 ، 3 ، 5 ، 7 ، 9 } ، أ = { 3 ، 5 ، 7 } ، ب = { 1 ، 5 ، 9 }

ولنقارن بين المجموعتين : تس(أ ∪ ب) وَ (تس أ) ∩ (تس ب)

لدينا : أ ∪ ب = { 1 ، 3 ، 5 ، 7 ، 9 }

تس(أ ∪ ب) = { 2 } .... (1)

تس أ = { 1 ، 2 ، 9 } ، تس ب = { 2 ، 3 ، 7 }

(تس أ) ∩ (تس ب) = { 2 } .... (2)

من (1) وَ (2) نستنتج أن :

تس(أ ∪ ب) = (تس أ) ∩ (تس ب)

تحقق بنفس الطريقة أن :

تس(أ ∩ ب) = (تس أ) ∪ (تس ب)

وبصفة عامة :

متممة اتحاد مجموعتين (أو تقاطعهما) هو تقاطع (اتحاد) متممتيهما .

3) تجزئة مجموعة :

لتكن المجموعات : س = { 0 ، 1 ، 2 ، 3 ، 4 }

أ = { 0 ، 2 ، 4 } ؛ ب = { 1 ، 3 } ؛ جـ = { 3 }

لدينا : أ ∩ ب = ∅ و أ ∪ ب = س

المجموعة { أ ، ب } تسمى تجزئة للمجموعة س

لاحظ أن :

أ ∩ جـ = ∅ لكن أ ∪ جـ = { 0 ، 1 ، 3 ، 4 }

أ ∪ جـ ≠ س

المجموعة { أ ، جـ } ليست تجزئة للمجموعة س

تعريف

تجزئة مجموعة غير خالية س هي مجموعة من أجزاء س تحقق الشروط التالية :

- كل عنصر من التجزئة هو جزء غير خال من س
- عناصر التجزئة منفصلة مثنى مثنى .
- اتحاد عناصر التجزئة يساوي المجموعة س .

4 - تمرين محلول

ليكن العددان : 36 وَ 84

1 - عين كلاً من المجموعتين : ق36 وَ ق84 .

2 - عين المجموعة : ق36 ∩ ق84 .

ثم اكتب هذه المجموعة بإعطاء خاصة مميزة لها .

استنتج ق م أ (36 ، 84) .

الحل

لدينا :

مجموعة قواسم 36 هي : ق36 = { 1 ،2 ،3 ،4 ،6 ،9 ،12 ،18 ،36 }

مجموعة قواسم 84 هي:

ق84 = { 1 ،2 ،3 ،4 ،6 ،7 ،12 ،14 ،21 ، 28 ، 42 ،84 }

مجموعة القواسم المشتركة للعددين 36 وَ 84 هي :

ق36 ∩ ق84 = { 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 6 ، 12 }

كل عنصر من هذه المجموعة يقسم العددين 36 وَ 84 .

أي :

ق36 ∩ ق84 = {س∈ ط / (س يقسم 36) ∧ (س يقسم 84) }

وبالتالي أكبر قاسم مشترك للعددين :36 وَ 84 هو العدد 12 أي :

ق م أ (36 ، 84) = 12

تـــمـــاريـــن

تعيين مجموعة

1) عين كلا من المجموعات التالية بالقائمة (بذكر عناصرها)

. أ = { س / (س ∈ ط) ∧ ($س^2 = 25$) }

. ب = { س / (س ∈ ح) ∧ ($س^2 = 36$) }

. جـ = { س / (س ∈ ص) ∧ ($س^2 \leq 16$) }

. د = { س / (س ∈ ص) ∧ ($-2 \leq س \leq 3$) }

2) عين بخاصة مميزة كلا من المجموعات التالية :

أ = { 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5 }

ب = { 2 ، 4 ، 6 ، 8 }

جـ = { 1 ، 3 ، 5 ، 7 ، 9 ، 11 ، .... }

د = { 5 ، 10 ، 15 ، 20 ، ... }

هـ = { ألف ، واو ، ياء }

العمليات على المجموعات

3) لتكن المجموعات :

أ = { 2 ، 4 ، 6 } ، ب = { 2 ، 5 } ، جـ = { 2 ، 3 ، 5 ، 6 }

1) أوجد كلا من : أ ∪ ب ؛ أ ∪ جـ ؛ ب ∪ جـ

أ ∩ ب ؛ أ ∩ جـ ؛ ب ∩ جـ

2) بين أن : (أ ∪ ب) ∩ جـ = (أ ∩ جـ) ∪ (ب ∩ جـ)

وأن : (أ ∩ ب) ∪ جـ = (أ ∪ جـ) ∩ (ب ∪ جـ)

4) لتكن المجموعتان :

أ = { 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5 ، 6 } ؛ ب = { 4 ، 5 ، 6 ، 7 ، 8 ، 9 }

قارن بين المجموعتين : (أ ـ ب) وَ (ب ـ أ)

5) لتكن المجموعتان :

سح = { 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5 ، 6 ، 7 } ؛ أ = { 1 ، 2 ، 4 ، 6 ، 7 }

1) عين تسحأ وَ سح ـ أ وَ سح ∩ تسحأ .

2) تحقق أن : سح ـ أ = سح ∩ تسحأ .

6) لتكن المجموعة سح = { 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5 ، 6 ، 7 ، 8 ، 9 }

أ وَ ب مجموعتان جزئيتان من سح حيث :

أ = { 2 ، 3 ، 4 ، 5 } ؛ ب = { 1 ، 4 ، 5 ، 7 ، 8 }

عين كلا من المجموعات :

أ ∩ ب ؛ أ ـ ب ؛ ب ـ أ ؛ (أ ـ ب) ∪ (ب ـ أ) ؛ تسح(أ ∪ ب)

بين أن المجموعة { أ ∩ ب ، (أ ـ ب) ∪ (ب ـ أ) ، تسح(أ ∪ ب) }

هي تجزئة للمجموعة سح .

7) لتكن المجموعة سح = { أ ؛ ب ؛ جـ ؛ د }

1) عين ج(سح) مجموعة أجزاء المجموعة سح .

2) تحقق من أن عدد عناصر ج(سح) هو 2^4 حيث 4 هو عدد عناصر المجموعة سح .



1.أنشطة تمهيدية

نشاط 1 :

ك و ل مجموعتان حيث :

ك= { أ ، ب ، جـ } ؛ ل= { 1 ، 2 }.

• عين جميع الثنائيات (س، ع) حيث : (س ∈ ك) ∧ (ع ∈ ل) .

مثلا : (أ، 1) ؛ (أ ، 2) .....

هذه الثنائيات تشكل مجموعة تسمى الجداء الديكارتي للمجموعتين ك و ل بهذا الترتيب ، ونرمز إليه بالرمز ك × ل .

أتمم : ك×ل = { (أ ، 1) ، (أ، 2) ،....... } .

نشاط 2 :

لتكن المجموعتان :

ك = { 2، 3، 5} ، ل = { 9، 12، 17، 20} .

• عين الجداء الديكارتي ك×ل .

• عين الثنائيات (س،ع) من المجموعة ك×ل التي تحقق الخاصية " س يقسم ع "

الخاصية : ج (س،ع) ؛ " س يقسم ع " التي ترفق عناصر من المجموعة ك بعناصر من المجموعة ل تعين علاقة من ك إلى ل .

2. العلاقة من مجموعة إلى مجموعة

1) تعريف :

> **ك و ل مجموعتان :**
> **كل خاصية ج (س،ع) معرفة على ك× ل تحدد علاقة من ك إلى ل**

نرمز للعلاقة بأحد الرموز التالية : ج ، $ج_1$ ، $ج_2$ ،....

• الكتابة ج (س ،ع) تعني أن العلاقة ج ترفق بالعنصر س من ك بالعنصر ع من ل.

• ك تسمى مجموعة بدء العلاقة ، ل تسمى مجموعة وصول العلاقة.

• مجموعة الثنائيات (س،ع) من ك× ل التي تحقق الخاصية ج (س،ع) تسمى بيان **العلاقة** ج ونرمز إليها بالرمز بج . إذن :

بج = { (س،ع) ∈ ك× ل / ج (س،ع) } .

لاحظ أن : بج ⊂ ك× ل .

مثال 1 :

ك = { 2 ، 6 ، 17 ، 20 ، 30 } ، ل = { 3 ، 4 ، 5 ، 13 } .

لتكن الخاصية " س مضاعف ع " المعرفة على ك× ل .

هذه الخاصية تحدد العلاقة ج المعرفة على ك× ل كما يلي :

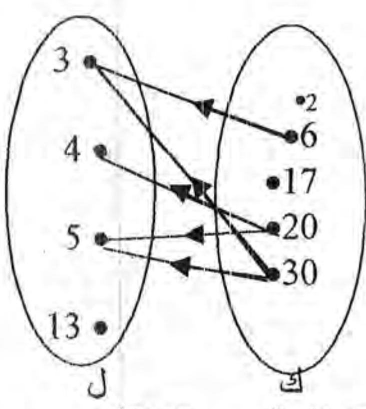
ج (س،ع) ⇔ " س مضاعف ع "

ومعناه : يرتبط العنصر س من ك مع العنصر ع من ل إذا وفقط إذا كان س مضاعف ع

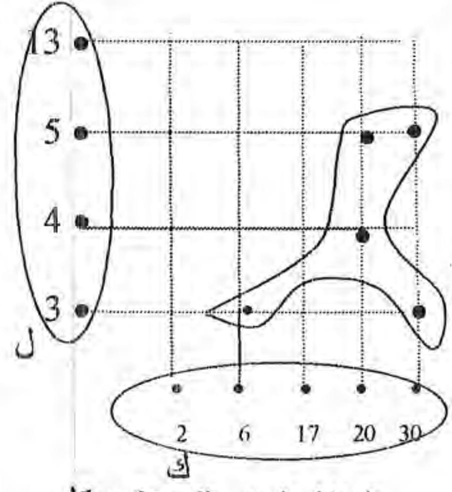
بيان هذه العلاقة هو مجموعة الثنائيات (س، ع) التي تحقق العلاقة ج أي :

بج = { (6 ، 3) ،(20 ، 4) ، (20 ، 5) ، (30 ، 3) ، (30 ، 5) } .

• تمثل العلاقة ج بأحد التمثيلين التاليين :

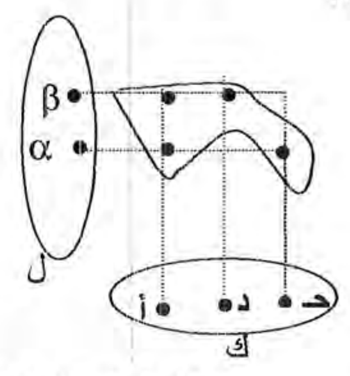


التمثيل السهمي للعلاقة ج
كل سهم يمثل ثنائية من البيان

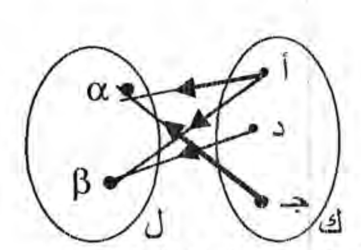


التمثيل البياني للعلاقة ج كل نقطة تمثل ثنائية من البيان

مثال 2 : ك ، ل مجموعتان حيث :
ك = { أ ، د ، جـ } ، ل = { α ، β } .
المجموعة ب = { (أ ، α) ، (أ ، β) (د ، β) ، (جـ ، α) } هي جزء من الجداء الديكارتي ك × ل وهي تعرف علاقة من ك إلى ل بيانها ب .
تمثل هذه العلاقة بأحد التمثيلين التاليين :



التمثيل البياني للعلاقة ع
كل نقطة تمثل ثنائية من البيان



التمثيل السهمي للعلاقة ع
كل سهم يمثل ثنائية من البيان

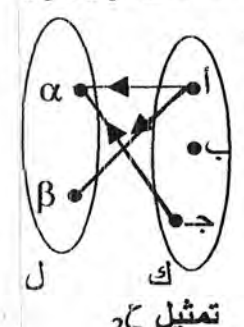
ع علاقة معرفة من ك إلى ل .
العلاقة العكسية للعلاقة ع ونرمز إليها بالرمز $ع^{-1}$ هي العلاقة من ل إلى ك المعرفة كما يلي :
∀ ع ∈ ل ، ∀ س ∈ ك : $ع^{-1}$(ع ، س) ⟺ ع (س ، ع) .
الرمز $ع^{-1}$ يقرأ " ع ناقص واحد".

أمثلة :

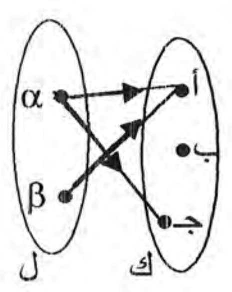
• لتكن $ع_0$ (س ، ع) هي العلاقة المعرفة من ط إلى ط بالخاصية " س مضاعف ع " . فالعلاقة العكسية $ع_0^{-1}$(ع ، س) للعلاقة $ع_0$ هي العلاقة المعرفة من ط إلى ط بالخاصية " ع يقسم س" .

• لتكن $ع_1$ (س ، ع) هي العلاقة المعرفة من ط إلى صح بالخاصية : "س مربع ع " .
فالعلاقة العكسية $ع_1^{-1}$(ع ، س) للعلاقة $ع_1$ هي العلاقة المعرفة من صح إلى ط بالخاصية " ع هو الجذر التربيعي للعدد س" .

• لتكن المجموعتان: ك = { أ ، ب ، جـ } ، ل = { α ، β } .
و ع$_2$ هي العلاقة المعرفة من ك إلى ل ، بيانها بع$_2$ حيث :
بع$_2$ = { (أ ، α) ، (أ ، β) ، (جـ ، α) } .
فالعلاقة العكسية لهذه العلاقة هي ع$_2^{-1}$ المعرفة من ل إلى ك بيانها بع$_2^{-1}$ حيث :
بع$_2^{-1}$ = { (α ، أ) ، (β ، أ) ، (α ، جـ) } .
نمثل العلاقتين ع$_2$ و ع$_2^{-1}$ سهميا كما يلي :



تمثيل ع$_2$



تمثيل ع$_2^{-1}$

3. العلاقة في مجموعة

1) تعريف

كل علاقة معرفة من المجموعة ك إلى المجموعة ك نفسها تسمى علاقة في المجموعة ك

بيان العلاقة ع في المجموعة ك هو جزء من ك × ك ونكتب بع ⊃ ك^2.
مثال : العلاقة المعرفة من ط إلى ط بالخاصية " س ضعف ع " هي علاقة في ط.

2) خواص علاقة في مجموعة

• الإنعكاس

لتكن المجموعة ل = { 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5 }
و ع علاقة معرفة في ل كما يلي :

ﻉ (س ، ع) ⟺ س ≤ ع +1 .

لدينا 1 ≤ 1+1 ، 2 ≤ 1+2 ، 3 ≤ 1+3 ، 4 ≤ 1+4 ، 5 ≤ 1+5

أي ﻉ (1 ، 1) ، ﻉ(2 ، 2) ، ﻉ (3 ، 3) ، ﻉ (4 ، 4) ، ﻉ (5 ، 5) .

وهذا يعني أن كل عنصر من ك مرتبط مع نفسه. نقول عندئذ إن العلاقة ﻉ إنعكاسية ومنه :

تعريف

> ﻉ علاقة في مجموعة ك .
> نقول إن ﻉ انعكاسية إذا وفقط إذا كان كل عنصر من ك مرتبطاً مع نفسه بالعلاقة ﻉ

مثال 1 :

لتكن س هي مجموعة مستقيمات المستوي وَ ﻉ هي العلاقة :

ﻉ(ق ، ك) ⟺ (ق) // (ك) .

نعلم أن كل مستقيم يوازي نفسه ، فعلاقة التوازي في س " ...//..." إنعكاسية .

مثال 2 :

العلاقة ﻉ المعرفة في ح بما يلي :

ﻉ (س ، ع) ⟺ س < ع ليست إنعكاسية . لأن كل عدد حقيقي ليس أصغر من نفسة أي : ∀ س ∋ ح : ﻉ (س ، س) خاطئة .

• التناظر

لتكن المجموعة ك = { أ ، ب ، جـ } .

و ﻉ علاقة معرفة في ك ببيانها :

بﻉ = { (أ ، ب) ، (ب ، أ) ، (أ ، جـ) ، (جـ ، أ) ،(ب ، ب) } .

لاحظ أن بﻉ هو مجموعة الثنائيات بحيث :

كلما كان (س ، ع) ∋ بﻉ فإن (ع ، س)∋ بﻉ .

نقول عندئذ إن العلاقة ﻉ تناظرية ومنه :

تعريف :

> ﻉ علاقة في مجموعة ك .
> نقول إن ﻉ تناظرية إذا وفقط إذا كان :
> ∀ س ∋ ك ، ∀ ع ∋ ك : ﻉ (س ، ع) ⟸ ﻉ (ع ، س) .

مثال 1 :

ح مجموعة الأعداد الحقيقية .

ع هي العلاقة المعرفة في ح كما يلي :

ع (س ، ع) ⇔ س = ع .

نعلم أن ∀ س ∋ ح ، ∀ ع ∋ ح : (س = ع) ⇐ (ع = س) .

أي : ∀ س ∋ ح ، ∀ ع ∋ ح : ع (س ، ع) ⇐ ع (ع ، س)

فعلاقة التساوي "...=..." تناظرية في ح .

مثال 2 :

لتكن ك مجموعة أفراد أسرة .

• العلاقة ع المعرفة في ك كما يلي : ع (س ، ع) ⇔ س أخ ع .

نعلم أنه إذا كان س أخ ع فإن ع أخ س فالعلاقة ع تناظرية .

• العلاقة عَ المعرفة في ك كما يلي : عَ (س ، ع) ⇔ س إبن ع

نعلم أنه إذا كان س إبن ع فإن ع ليس إبن س فالعلاقة عَ ليست تناظرية .

• ضد التناظر

لتكن المجموعة ك = { 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5 ، 6 } .

و ع علاقة معرفة في ك كما يلي : ع (س ، ع) ⇔ س نصف ع

بيان هذه العلاقة هو بع = { (1 ، 2) ، (2 ، 4) (3 ، 6) } .

لاحظ أن الثنائيات(1 ، 2) ، (2 ، 4) (3 ، 6) هي عناصر من بع بينما الثنائيات (2 ، 1) ؛ (4 ، 2) ، (6 ، 3) ليست عناصرمن بع

أي كلما كان (س ، ع) ∋ بع فإن (ع ، س) ∌ بع نقول عندئذ إن العلاقة ع ضد تناظرية ومنه:

تعريف :

ع علاقة في مجموعة ك نقول إن ع ضد تناظرية إذا وفقط إذا تحقق ما يلي : من أجل أي عنصرين مختلفين س و ع من ك فإنه : إذا كان س مرتبطاً مع ع فلا يكون ع مرتبطاً مع س .

نعبر عن هذا التعريف بالإستلزام التالي :

(ج ضد تناظرية)⇔[∀ (س،ع)∈ ك^2: [ج(س،ع)∧ ج(ع،س)] ⇐ س = ع]

ملاحظة : يمكن أن تكون العلاقة ج علاقة ضد تناظرية و تناظرية في آن واحد.
فخاصية ضد التناظر ليست نفياً لخاصية التناظر .

مثال 1 :

لتكن المجموعة : ك = { أ ، ب ، جـ ، د }
ولتكن ج علاقة معرفة في ك ببيانها :
ب ج = { (أ ، ب) ، (ب ، جـ) ، (أ ، د) ، (د ، ب) }
لاحظ أنه من أجل س و ع من ك بحيث س ≠ ع :
كلما كان (س ، ع) ∈ ب ج فإن (ع ، س) ∉ ب ج .
أي كلما كان س مرتبطاً مع ع لايكون ع مرتبطاً مع س . وهذا يعني أن العلاقة ج ضد تناظرية .

مثال 2 :

لتكن المجموعة : ك = {2 ، 3 ، 4 ، 6}
ولتكن العلاقة ج$_1$ المعرفة في ك بمايلي ج$_1$ (س ،ع)⇔ س يقسم ع .
تحقق من أن بيان ج$_1$ هو:

ب ج$_1$ = {(2، 2)،(3 ، 3)،(4 ، 4)،(6 ، 6)،(2 ، 4)،(2 ، 6)،(3 ،6)}
لاحظ أنه من أجل أي عنصرين س و ع من ك:
• إذا كان س≠ ع ، فكلما كان س يقسم ع فإن ع لايقسم س .
مثلا: 2 يقسم 4 ولكن 4 لا يقسم 2
3 يقسم 6 ولكن 6 لا يقسم 3
2 يقسم 6 ولكن 6 لا يقسم 2
• إذا كان س يقسم ع و ع يقسم س فإن س = ع
• العلاقة ج$_2$ المعرفة في ك ببيانها: ب ج$_2$ ={(2 ، 3)، (3،3) ،(3 ،2)} ليست ضد تناظرية لأنه توجد في ب ج$_2$ ثنائية لا تحقق خاصية ضدالتناظر .
مثلا : 2 يرتبط مع 3 و 3 يرتبط مع 2 لكن 2≠3

- التعدي

لتكن المجموعة ك={أ، ب، جـ، د} ولتكن ج علاقة في ك بيانها هو:

بع = {(أ ، ب)،(ب ، جـ)،(أ ، جـ)،(ب ، د)،(أ ، د)} التمثيل يبين أنه كلما كان س مرتبطا مع ع وكان ع مرتبطا مع ص يكون س مرتبطاً مع ص نقول عندئذ ان ع علاقة متعدية.

ومنه:

تعريف :

ع علاقة في مجموعة ك.
نقول أن ع علاقة متعدية إذا و فقط إذا تحقق مايلي :
∀(س،ع،ص)∈ ك^3 : [ع (س ، ع) ∧ ع(ع ، ص)] ⇐ ع (س ، ص).

• **مثال 1 :**

س هي مجموعة مستقيمات المستوي.

ع هي العلاقة : "....يوازي...." في المجموعة **س**. نعلم أنه إذا كان (ق)//(ك) و كان (ك)//(ل) فإن (ق)//(ل) فعلاقة التوازي " .....//..... " في المجموعة **س** هي علاقة متعدية.

• **مثال 2 :**

ع هي العلاقة : " ....يعامد.... " في المجموعة **س** . نعلم أنه إذا كان (ق) ⊥ (ك) و كان (ك) ⊥ (ل) فان (ق)//(ل).
إذن علاقة التعامد " ..... ⊥ ..... " في المجموعة **س** ليست متعدية.

4 . تطبيقات

1) علاقة التكافؤ في مجموعة

لتكن ع العلاقة المعرفة في ح* كما يلي: ع(س،ع) ⇔ س×ع >0

لندرس خواص هذه العلاقة:

- هل ζ انعكاسية ؟

(ζ انعكاسية)معناه (∀ س ∈ ح* : ζ (س، س)) لدينا :

∀س∈ح* : س ×س = س^{2} >0

أي : ∀ س∈ ح* : ζ (س،س). (حسب تعريف ζ) فالعلاقة ζ انعكاسية.

- هل ζ تناظرية ؟

(ζ تناظرية) معناه [∀ (س،ع)∈ ح^{*2} : ζ (س،ع) ⟸ ζ(ع ،س)]

لدينا:

ζ(س،ع) ⟺ س×ع >0

⟺ع × س >0 (الضرب تبديلي في ح)

⟺ ζ (ع ، س) (حسب تعريف ζ)

فالعلاقة ζ تناظرية.

- هل ζ متعدية؟

(ζ متعدية) معناه :

∀ (س،ع، ص)∈ ح^{*3}: ζ [(س،ع)Λ ζ(ع،ص) ⟸ ζ(س،ص)]

لدينا :

[ζ (س،ع) ∧ ζ(ع ،ص)] ⟺ [س×ع >0 ∧ ع×ص>0]

⟺ (س×ع).(ع×ص)>0

⟺ (س×ص).ع^{2} >0

⟺س ×ص>0. لأن (ع^{2} >0)

⟺ ζ (س،ص) (حسب تعريف ζ)

فالعلاقة ζ متعدية

هل ζ ضد تناظرية ؟

(ζ ضد تناظرية) معناه :

[∀(س،ع)∈ ح^{*2} : ζ(س،ع)∧ ζ (ع ، س) ⟸ س=ع]

لدينا:

[ζ(س،ع)∧ ζ (ع ، س)] ⟺ [(س ع >0) ∧ (ع س >0)]

الاستلزام [(س ع >0)∧ (ع س >0) ⟸ س=ع] خاطئ لانه توجد ثنائيات من ح^{2} بحيث تكون المقدمة صحيحة والنتيجة خاطئة .

فمثلا : (2×3 >0) ∧ (3 ×2 > 0) صحيحة ولكن 2 = 3 خاطئة.
فالعلاقة ع ليست ضد تناظرية .
العلاقة ع انعكاسية و تناظرية و متعدية .
تسمى كل علاقة إنعكاسية و تناظرية ومتعدية في مجموعة علاقة تكافؤ.
• نقول عن كل عددين حقيقيين س،ع يحققان العلاقة ع انهما متكافئان وفق ع.
نعلم أن س ع > 0 معناه س و ع لهما نفس الاشارة .
اذن كل عددين موجبين معا أو سالبين معا هما عددان متكافئان وفق ع.
فعناصر المجموعة $ح^*_+$ متكافئة وفق ع وتسمى صنف تكافؤ وفق ع.
وعناصر المجموعة $ح^*_-$ متكافئة وفق ع وتسمى صنف تكافؤ وفق ع أيضا

2) علاقة الترتيب في مجموعة

لتكن العلاقة ع المعرفة في ط* بما يلي :
∀ (أ ، ب) ∈ $ط^{*2}$: ع (أ ،ب) ⇔ أ يقسم ب
لندرس خواص ع .

• الخاصية الانعكاسية

(ع انعكاسية) معناه (∀ أ ∈ ط* : ع (أ ، أ))
نعلم أن كل عدد طبيعي غير معدوم يقسم نفسه أي : (∀ أ ∈ ط* : ع (أ ، أ))
فالعلاقة ع انعكاسية.

• الخاصية التناظرية

(ع تناظرية) معناه : ∀ (أ ، ب) ∈ $ط^{*2}$: ع (أ ، ب) ⇐ ع (ب ، أ) لدينا:
∀ (أ ، ب)∈ $ط^{*2}$: ع (أ ، ب) ⇔ أ يقسم ب (التعريف)
⇔ ب مضاعف أ
فالاستلزام ∀ (أ ، ب) ∈ $ط^{*2}$: ع (أ ، ب) ⇐ ع (ب ، أ) خاطئ.
فالعلاقة ع ليست تناظرية.

• خاصية التعدي

(ع متعدية) معناه :
∀ (أ ، ب ، جـ)∈ $ط^{*3}$: [ع (أ ، ب) ∧ ع (ب ، جـ)] ⇐ ع (أ ، جـ)
لدينا:
∀ (أ ، ب ، جـ)∈ $ط^{*3}$:
ع (أ ، ب) ∧ ع (ب ، جـ) ⇔ (أ يقسم ب) ∧ (ب يقسم جـ)

⟸ (ب مضاعف أ) ∧ (جـ مضاعف ب)
⟸ (جـ مضاعف ب) ∧ (ب مضاعف أ)
⟸ جـ مضاعف أ
⟸ أ يقسم جـ ⟸ ع (أ ، جـ)

فالعلاقة ع متعدية

. خاصية ضد التناظر

(ع ضد تناظرية) معناه :

∀ (أ ، ب) ∈ ط^{*2} : ع (أ ، ب) ∧ ع (ب، أ) ⟸ أ = ب

لدينا :

ع (أ ، ب) ∧ ع (ب ، أ) ⟸ [(أ يقسم ب) ∧ (ب يقسم أ)]
⟸ (ب مضاعف أ) ∧ (أ مضاعف ب)
⟸ (E (ن،نَ)∈ ط^{*2} : (ب= ن أ)∧ (أ = نَ ب))
⟸ [نَ ب= نَ (ن أ) ∧ (أ = نَ ب)]
⟸ أ= نَ ن أ
⟸ نَ ن =1
⟸ ن = نَ =1 (لأن ن ∈ ط* ، نَ ∈ ط*)

اذن (أ =1.ب)∧ (ب=1.أ) أي : أ = ب

فالعلاقة ع ضد تناظرية.

العلاقة ع انعكاسية و ضد تناظرية و متعدية.

تسمى كل علاقة إنعكاسية و ضد تناظرية و متعدية في آن واحد علاقة ترتيب.

5. تمرين محلول

ع علاقة معرفة في ح كما يلي :

ع (س،ع) ⟸ س^{2} +2س = ع^{2} +2 ع

1-بين أن ع علاقة تكافؤ.

2-عين صنف تكافؤ العدد 0 (أي مجموعة الأعداد الحقيقية المكافئة للعدد 0 .)

الحل:

1-لنبين أن ℛ علاقة تكافؤ .

• الخاصة الانعكاسية

(ℛ انعكاسية) معناه (∀ س∈ ح : ℛ (س،س))

لدينا: ∀ س∈ ح : $س^2+2$ س $= س^2+2$ س

اذن ℛ (س، س)

فالعلاقة ℛ انعكاسية.

• الخاصة التناظرية

(ℛ تناظرية) معناه (∀ (س ،ع) ∈ $ح^2$: ℛ (س ،ع) ⇐ ℛ (ع ،س))

لدينا:

ℛ (س ،ع) ⇔ $س^2 + 2$ س= $ع^2 + 2$ ع

⇔ $ع^2 + 2$ ع = $س^2 + 2$ س

⇔ ℛ (ع ،س)

فالعلاقة ℛ تناظرية.

• خاصة التعدي

(ℛ متعدية) معناه :

∀ (س ،ع ،ص)∈ $ح^3$: ℛ (س ،ع)∧ ℛ (ع ،ص)⇐ ℛ(س،ص)

لدينا:

ℛ (س ،ع) ∧ ℛ(ع ، ص)⇔[($س^2+2$ س = $ع^2+2$ ع) ∧ ($ع^2+2$ ع = $ص^2+2$ ص)]

⇔ [($س^2+2$ س)+($ع^2+2$ ع)=($ع^2+2$ ع) + ($ص^2+2$ ص)]

⇔ $س^2+2$ س= $ص^2+2$ ص

⇔ ℛ (س ،ص)

فالعلاقة ℛ متعدية.

العلاقة ℛ انعكاسية و تناظرية و متعدية فهي اذن علاقة تكافؤ.

2- لنعين مجموعة الأعداد الحقيقية المكافئة للعدد 0:

البحث عن مجموعة الأعداد الحقيقية المكافئة للعدد 0 يؤول الى البحث عن الأعداد س بحيث : ℛ (س ، 0)

لدينا:

ج (س ،0) ⇔ س ^{2} +2 س =0 ^{2} +2 × 0

⇔ س ^{2} +2 س = 0

⇔ س(س+2)=0

⇔ (س=0) ∨ (س= -2)

مجموعة الأعداد الحقيقية س بحيث ج (س ،0) هي المجموعة:{-2، 0} و تسمى صنف تكافؤ العدد 0 ، نرمز اليها بالرمز $\bar{\mathbf{0}}$

ونكتب: $\bar{\mathbf{0}}$ ={ -2 ، 0}

تمارين

1 لتكن المجموعتان:

ق ={1 ، 2 ، 3} ، ك= { أ ، ب }

أكتب كلا من المجموعتين : ق×ك و ك×ق

2 لتكن ع علاقة من ق الى ك.

عين بع بيان العلاقة ع في كل من الحالات التالية :

1) ق= {1 ، 4 ، 7} ، ك= {0 ، 1، 5} ؛ ع (س ،ع) ⟺ س <ع +3

2) ق= {1 ،4، 7} ، ك= {0 ، 1، 5} ؛ ع (س ،ع) ⟺ س +ع ≤ 6

3) ق= {2 ،4، 6 } ، ك= {3 ، 7، 9} ، ع (س ،ع) ⟺1 ≤ س – ع <3

4) ق= {4 ،9، 10} ، ك= {2 ،3، 5}، ع (س ،ع) ⟺ س= ع^2

3 لتكن المجموعة ق= {1 ،2، 3 ، 4 ،......،15}.

نعرف في كل من الحالات التالية علاقة في ق كمايلي.

$ع_1$ (س ،ع) ⟺ س هو نصف ع.

$ع_2$ (س، ع) ⟺ س يقسم ع

$ع_3$ (س ،ع)⟺ س مربع ع

$ع_4$ (س ،ع)⟺ س ضعف ع

$ع_5$ (س ،ع) ⟺ س مضاعف ع

$ع_6$ (س،ع) ⟺ س هو الجذر التربيعي للعدد ع .

عين عناصر كل من: ب$ع_1$ ، ب$ع_2$ ،ب$ع_3$ ، ب$ع_4$ ،ب$ع_5$ ،ب$ع_6$

4 لتكن المجموعتان ق= {أ ،ب} ، ك= {3 ، 5، 7، 9}

ع علاقة معرفة من ق الى ك ببيانها :

بع = {(أ ،3)،(أ ،7)،(ب ،5)،(ب ،7)،(ب ،9)}

مثل بع سهميا و بيانيا.

5 ع و ع' علاقتان معرفتان كمايلي :

ع : ط ⟵ ط

س ⟼ ع – 5 س

ع' : ح ⟵ ح

س ⟼ ع = 5 – س

1) مثل بيانيا كلا من العلاقتين ع و ع' في مستو منسوب الى معلم

2) بفرض (γ) تمثيل العلاقة ﻉ وَ (ل) تمثيل العلاقة ﻉ َ ، بين أن (γ) $\supset$ (ل)

6 ق مجموعة ، ﻉ علاقة معرفة في ق .
عين بذكر العناصر بيان العلاقة ﻉ في كل من الحالات التالية :

1) ق = { 1، 2، 3، 4، 6 } وَ ﻉ (س،ع) $\Leftrightarrow$ س ضعف ع
2) ق = { 1، 2 ، 3 ، 4 } وَ ﻉ (س،ع) $\Leftrightarrow$ س جذره ع
3) ق = { 1، 2 ، 3 ، 4 } وَ ﻉ (س،ع) $\Leftrightarrow$ س $\neq$ ع
4) ق = { 1، 2 ، 3 ، 4 } وَ ﻉ (س،ع) $\Leftrightarrow$ س = ع
مثل سهميا كلا من هذه العلاقات .

7 لتكن المجموعة ق { أ ، ب، ج ، د } وَ العلاقة ﻉ المعرفة في ق ببياناتها
ب ﻉ = { (أ ، أ)،(ب،ب)،(ج،ج)،(أ،ب)،(ب،أ)}
هل هذه العلاقة : انعكاسية ؟ تناظرية ؟ متعدية ؟

8 ادرس خواص العلاقة ﻉ المعرفة في المجموعة ق في كل من الحالات التالية
1) ق = { 1 ، 2، 3، 4، 5 } وَ ﻉ (س،ع) $\Leftrightarrow$ س +3ع=16
2) ق= {0، 1 ، 2، 3، 4 } وَ ﻉ (س،ع) $\Leftrightarrow$ س $\leq$ ع^2
3) ق= {1 ، 2، 4 } وَ ﻉ (س،ع) $\Leftrightarrow$ س $\geq$ ع^2
4) ق= { 1 ، 2، 3 } وَ ﻉ (س،ع) $\Leftrightarrow$ س+ ع^2 $\leq$ 2
5) ق= { 1 ، 2، 3 } وَ ﻉ (س،ع) $\Leftrightarrow$ س =ع $\geq$ س ع

9 لتكن المجموعتان : ق = { 0 ، 1 } وَ ك = {0 ، 1، 2 }
ﻉ علاقة معرفة في كل من ق و ك كما يلي :
ﻉ (س،ع) $\Leftrightarrow$ س^2 = ع
بين أن ﻉ إنعكاسية في ق و غير إنعكاسية في ك .

10 ﻉ$_1$ ، ﻉ$_2$ ، ﻉ$_3$ علاقات معرفة في ح كما يلي :
1) ﻉ$_1$(س،ع) $\Leftrightarrow$ س $\geq$ ع
2) ﻉ$_2$ (س،ع) $\Leftrightarrow$ 3س^2 +2س = 2 ع^2 + 3 ع
3) ﻉ$_3$(س ،ع) $\Leftrightarrow$ س = 2ع
أدرس الانعكاس و التناظر و ضد التناظر و التعدي لكل علاقة من هذه العلاقات .

11 لتكن **س** مجموعة مستقيمات المستوى ولتكن ع علاقة معرفة في **س** كالتالي :

ع (ق ، قَ) ⇔ (ق) ⊥ (قَ)

هل ع انعكاسية ؟ هل هي تناظرية ؟ هل هي ضد تناظرية ؟ هل هي متعدية ؟ هل ع علاقة تكافؤ ؟ هل ع علاقة ترتيب ؟

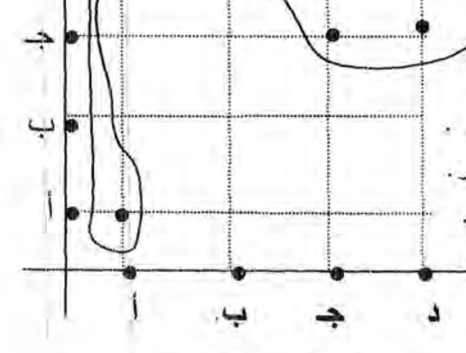
12 نفس التمرين السابق بالنسبة إلى كلٍ من العلاقتين $ع_1$ ، $ع_2$ المعرفتين في **س** كما يلي : $ع_1$ (ق، قَ) ⇔ (ق) // (قَ)

$ع_2$ (ق،قَ) ⇔ (ق) يقطع (قَ)

13 – لتكن (γ) مجموعة دوائر المستوى و العلاقة :

ع($د_1$،$د_2$) ⇔ ($د_1$) لها نفس مركز ($د_2$) . بين أن ع علاقة تكافؤ .

14 ع علاقة معرفة في المجموعة { أ، ب ،ج ،د } بتمثيلها البياني التالي :



1) هل ع إنعكاسية ؟
2) هل ع تناظرية ؟
4) هل ع متعدية ؟

- أتمم هذا التمثيل لكي تصبح :
  - ع إنعكاسية : علم النقاط المضافة بالأحمر .
  - ع تناظرية : علم النقاط المضافة بالأخضر.
  - ع متعدية : علم النقاط المضافة بالأصفر .

ما هي الثنائيات التي يجب أن تضاف الى بيان العلاقة ع لكي تصبح علاقة تكافؤ ؟

15 [م س نصف مستقيم مبدؤه م . ع علاقة معرفة في [م س كما يلي : نقول إن النقطة أ من [م س مرتبطة بالنقطة ب من [م س اذا و فقط اذا كان أ ∈ [م ب] . بين أن ع علاقة ترتيب .

16 ق مجموعة تلاميذ قسمك .

نقول أن لتلميذين نفس السن إذا ولدا في السنة نفسها . بين أن العلاقة المعرفة في ق بالخاصية :

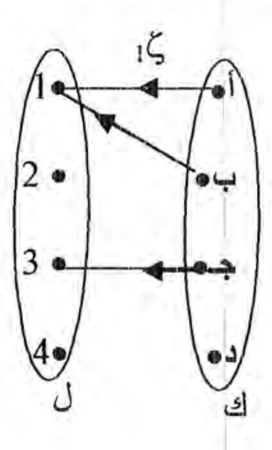
" س له على الأقل نفس سن ع " هي علاقة ترتيب .

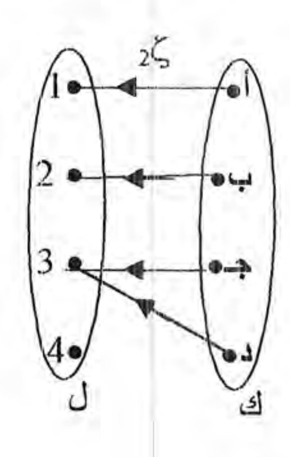
12 الدالـة-التطبيق

1- أنشطة تمهيدية

نشاط 1

ζ_1 و ζ_2 علاقتان من ك الى ل معرفتان بتمثيليهما السهميين التاليين :





• لاحظ أن كل عنصر من ك ينطلق منه سهم واحد على الأكثر
العلاقة ζ_1 تسمى دالة من المجموعة ك إلى المجموعة ل .
العنصر 1 من ل هو صورة كل من العنصرين أ و ب من ك .
كل من أ و ب هو سابقة للعنصر 1.
العنصر 3 هو صورة جـ من ك.
العنصر د من ك ليس له صورة
نكتب : ζ_1(أ) = ζ_1(ب) = 1.
ζ_1(جـ) = 3 .

• لاحظ أن كل عنصر من ك ينطلق منه سهم واحد فقط .
العلاقة ζ_2 تسمى تطبيقا للمجموعة ك في المجموعة ل .
ζ_2(أ) = 1 ، ζ_2(ب) = 2 ،
ζ_2(جـ) = ζ_2(د) = 3 .
العنصر 4 من ل له سابقة من ك .

نشاط 2 .

ك مجموعة أشخاص ، ل مجموعة هوايات .
ع علاقة من ك إلى ل معرفة بمخططها السهمي التالي :

ع ليست دالة وليست تطبيقا

لماذا..؟

1. الدالة

1) تعريف :

> ك ، ل مجموعتان
> نسمي دالة من ك الى ل كل علاقة ترفق كل عنصر من ك بعنصر واحد على الأكثر من ل .

نرمز إلى دالة برمز مثل تا ، ها ، عا ..
نرمز إلى كل دالة تا من ك إلى ل كما يلي :

تا : ك ⟵ ل

س ⟼ ع = تا(س)

- ك تسمى مجموعة بدء الدالة
- ل تسمى مجموعة وصول الدالة تا
- العنصر ع يسمى صورة العنصر س بالدالة تا

و نكتب : ع = تا (س)

ونقرأ : ع يساوي " تالـ س "

- الكتابة س ⟼ ع = تا(س) تقرأ : س صورته ع أو س صورته تا(س)

مثال 1 :

ك مجموعة أشخاص ، ل مجموعة مدن . ع العلاقة من ك الى ل المعرفة بالجملة المفتوحة : "س ولد في ع "

ع هي دالة من ك الى ل لأن كل شخص من المجموعة ك ولد في مدينة واحدة على الأكثر من المجموعة ل .

مثال 2

العلاقة ع المعرفة كما يلي

ع : ص ⟵ ط

ع (س،ع) ⟺ س = $ع^2$

هي دالة من ص إلى ط لأنه إما أن يكون العدد الصحيح س مربعا لعدد طبيعي ع مثل العدد الطبيعي 9 وعندئذ يكون ع (س، ع) و إما أن لايكون مربعا لأي عدد طبيعي مثل – 2 فلا يرتبط بأي عنصر من ط .

مثال 3

العلاقة ع المعرفة كما يلي :

ع : **ط** ⟵ **ص**

ع (س، ع) ⟺ س= $ع^2$ ليست دالة لأن : 9 = $(3)^2$ و 9 = $(-3)^2$ فالعلاقة ع تربط العدد الطبيعي 9 بأكثر من عنصر .

2) مجموعة تعريف دالة :

لتكن الدالة تا : **ك** ⟵ **ل**

س ⟼ ع = تا(س) .

مجموعة تعريف الدالة تا هي مجموعة العناصر س من ك التي لها صور من ل بالدالة تا

نسمي مجموعة قيم الدالة تا مجموعة العناصر ع من ل التي هي صور بالدالة تا لعناصر من ك

مثال :

تا دالة معرفة كما يلي :

تا : ح ⟵ ح

س ⟼ تا(س)= $\sqrt{س-1}$

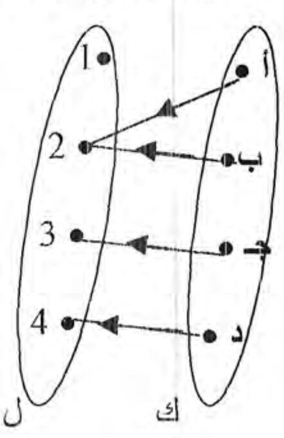
نعلم أنه لايوجد جذر تربيعي لعدد حقيقي سالب . إذن تكون الدالة تا معرفة إذا كان

س – 1 ≥ 0 أي س ≥ 1 و منه .

$ف_{تا}$= {س : س ∈ ح ∧ س ≥ 1 } أي $ف_{تا}$ = [1 ، +∞ [

2. التطبيق

ليكن التمثيل السهمي الآتي لعلاقة ع من ك إلى ل . لاحظ أن كل عنصر من ك له صورة واحدة فقط من ل بالعلاقة ع
هذه العلاقة هي دالة من ك إلى ل مجموعة تعريفها هي المجموعة ك .
تسمى هذه العلاقة تطبيقا للمجموعة ك في المجموعة ل .



تعريف :

> ك ، ل مجموعتان .
> نسمي تطبيقا للمجموعة ك في المجموعة ل كل علاقة ترفق كل عنصر من ك بعنصر واحد فقط من ل .

نرمز لتطبيق برمز مثل : تا ،ها ، حا ....
ملاحظة :
كل تطبيق للمجموعة ك في المجموعة ل هو دالة مجموعة تعريفها هي ك .
نرمز للتطبيق تا للمجموعة ك في ل كما يلي

تا . ك ⟵ ل

س ⟼ ع = تا (س) .

ونقرأ س صورته ع أو س صورته تا (س) .

مثال : تا و ها دالتان معرفتان كما يلي :

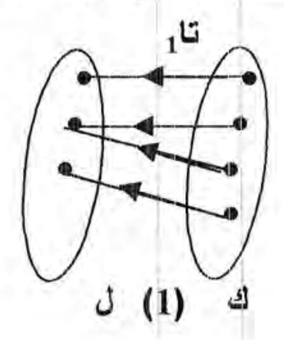
تا : ح ⟵ ح   ها : [1 ، + ∞ [⟵ ح

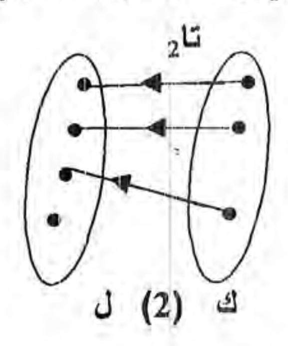
س ⟼ تا (س) = $\sqrt{س-1}$ س ⟼ ها (س)= $\sqrt{س-1}$

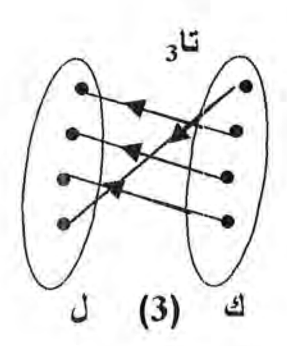
- الدالة تا ليست تطبيقا لأن فـ$_{تا}$ = [1 ، + ∞ [أي أن فـ$_{تا}$ ⊂ ح
- الدالة ها هي تطبيق لأن فـ$_{ها}$ هي مجموعة البدء . فـ$_{ها}$ = [1، +∞ [

انواع التطبيقا ت

لتكن تا$_1$ ، تا$_2$ ، تا$_3$ ثلاث تطبيقات للمجموعة ك في ل ممثلة سهميا كما يلي :







لاحظ أن :

- كل عنصر من ك ينطلق منه سهم واحد فقط . أي كل عنصر من ك له صورة واحدة من ل .

لكن وصول السهام يختلف من تطبيق إلى أخر.
فأوضاع الصور تميز هذه التطبيقات عن بعضها .

لندرس حالات صور هذه التطبيقات .

• في (1) كل عنصر من ل يصله سهم واحد على الأقل، أي كل عنصر من ل هو صورة لعنصر واحد على الأقل من ك .

التطبيق تا يسمى **تطبيقا غامرا** أو يسمى **غمرا** إذن :

> (تا غمر للمجموعة ك في المجموعة ل) معناه :
>
> $(\forall\, \text{ع} \in \text{ل} ،\ \exists\, \text{س} \in \text{ك} : \text{ع} = \text{تا}(\text{س}))$

• في (2) كل عنصر من ل يصله سهم واحد على الأكثر ، أي كل عنصر من ل هو صورة لعنصر واحد على الأكثر من ك .هذا يعني أن لعنصرين مختلفين من ك صورتين مختلفتين من ل :

يسمى التطبيق تا_2 تطبيقا متباينا ، أو يسمى تباينا .إذن :

> (تا تباين) معناه : $(\text{س}_1 \neq \text{س}_2 \Rightarrow \text{تا}(\text{س}_1) \neq \text{تا}(\text{س}_2))$
>
> وبأخذ العكس النقيض للاستلزام السابق يكون :
>
> (تا تباين) معناه : $(\text{تا}(\text{س}_1) = \text{تا}(\text{س}_2) \Rightarrow \text{س}_1 = \text{س}_2)$

• في (3) كل عنصر من ل يصله سهم واحد فقط ، أي كل عنصر من ل هو صوره لعنصر واحد من ك .

يسمى التطبيق تا_3 تطبيقا تقابليا أو يسمى تقابلا إذن :

> (تا تقابل) معناه :
>
> $(\forall\, \text{ع} \in \text{ل} ،\ \exists!\, \text{س} \in \text{ك} : \text{ع} = \text{تا}(\text{س}))$

(الكتابه $\exists!\, \text{س} \in \text{ك}$) تبين أنه يوجد عنصر وحيد س من المجموعة ك .

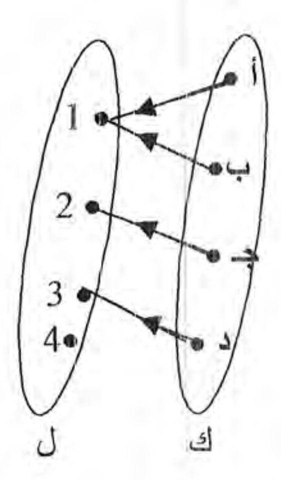
ملاحظة :

كل تقابل هو تطبيق متباين و غامر في آن واحد .

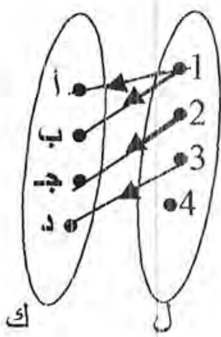
4 . تطبيقات

1) العلاقة العكسية لتطبيق

تا تطبيق للمجموعة ك في المجموعة ل ممثل سهميا كما في الشكل :



التمثيل السهمي للعلاقة العكسية $تا^{-1}$ يكون كالتالي :



لاحظ أن العنصر 1 له صورتان والعنصر 4 ليس له صورة . فالعلاقة $تا^{-1}$ ليست تطبيقا .

بصورة عامة :

العلاقة العكسية لتطبيق ليست دائما تطبيقا .

نقبل الخاصية :
تكون العلاقة العكسية لتطبيق تا تطبيقا إذا و فقط إذا كان تا تقابليا .

2) تعيين التطبيق العكسي لتقابل

مثال 1 :
ك، ل مجموعتان حيث :
ك = { 0 ، 1، 2، 5 } ؛ ل = { 2، 3 ، 4 ، 5 } .
تا هو التطبيق المعرف كما يلي :
تا : ك ⟵ ل
س ⟼ ع = س + 2
• لنتحقق أن تا تقابل .
لدينا : تا (س) = س + 2
إذن : تا (0) = 0 + 2 = 2
تا (1) = 1 + 2 = 3
تا (2) = 2 + 2 = 4
تا (5) = 5 + 2 = 7
لاحظ أن لكل عنصر من المجموعة ل سابقة وحيدة من ك ، هذا يعني أن تا تقابل . فهو يقبل تطبيقا عكسيا $تا^{-1}$.
• لنبحث عن $تا^{-1}$
التطبيق تا يرفق كل عنصر س من ك بعنصر ع من ل وفق الخاصية ع = س + 2 التي تعبر عن ع بدلالة س .
فالتطبيق $تا^{-1}$ يرفق كل عنصر ع من ل بعنصر س من ك ، وفق خاصية تعبر عن س بدلالة ع .لنبحث عن هذه الخاصية :
لدينا :
ع = س + 2 ⟺ س = ع - 2
إذن يعرف التطبيق $تا^{-1}$ كالتالي :
$تا^{-1}$: ل ⟵ ك
ع ⟼ س = ع -2
ونكتب $تا^{-1}$ (ع) = س
لدينا أيضا : تا (س) = ع . وبصفة عامة لدينا التكافؤ التالي :
تا(س) = ع ⟺ $تا^{-1}$ (ع) = س

مثال 2 :

ها تطبيق معرف كما يلي :

ها : ح* ⟵ ح - { 2 }

$$س \longmapsto ع = \frac{2س - 1}{س}$$

• لنبين أن ها تقابل .

يكون ها تقابلا إذا و فقط إذا كان لكل عنصر ع من مجموعة الوصول ح - { 2 } سابقة وحيدة س من ح* هذا معناه :

∀ ع ∋ ح - { 2 } ، ∃! س ∋ ح* بحيث: ها (س) = ع .

$$ها\ (س) = ع \Leftrightarrow \frac{2س - 1}{س} = ع$$

$$\Leftrightarrow 2س - 1 = س.ع \qquad (س \in ح^*)$$

$$\Leftrightarrow 2س - س ع = 1$$

$$\Leftrightarrow (2 - ع) . س = 1$$

$$\Leftrightarrow س = \frac{1}{2 - ع} \qquad (ع \neq 2)$$

فالعدد الحقيقي $\frac{1}{2 - ع}$ أي العدد س وحيد من أجل كل عدد ع يختلف عن 2 .

فكل عدد ع من ح - { 2 } له سابقة وحيدة من ح* .

إذن ها تقابل و بالتالي يقبل تطبيقا عكسيا $ها^{-1}$

لنعين $ها^{-1}$:

تعيين $ها^{-1}$ يؤول إلى التعبير عن س بدلالة ع .

لدينا :

$$ع = \frac{2س - 1}{س} \Leftrightarrow س = \frac{1}{2 - ع} \qquad (نتيجة سابقة)$$

$ها^{-1}$: ح - { 2 } ⟵ ح*

$$ع \longmapsto س = \frac{1}{2 - ع}$$

نكتب : $هـا^{-1}$ (ع) = $\frac{1}{2 - ع}$

• نرمز عادة إلى المتغير بالرمز س ، فكل عنصر س من المجموعة ح - { 2 } له صورة واحدة وفق $هـا^{-1}$ من المجموعة ح* هي $\frac{1}{2 - س}$

و نكتب : $هـا^{-1}$ (س) = $\frac{1}{2 - س}$

5. تمـارين محـلولة

تمرين 1 :

تا و ها دالتان معرفتان في ح كما يلي :

تا : ح ⟵ ح ، ها :ح ⟵ ح

س ⟼ تا (س) = س^2 - 4 س ⟼ ها (س) = $\frac{2}{س - 1}$

1- عيّن كلا من ف$_{تا}$ ، ف$_{ها}$ ، مجموعتي تعريف تا و ها .

2- احسب ، إن أمكن : تا ($\overline{1- \sqrt{3}}$) ؛ ها(-1)؛ ها(1).

3- هل الدالة تا تطبيق ؟ هل الدالة ها تطبيق ؟

الحل :

• تعيين ف$_{تا}$:

لدينا : تا(س) = س^2 - 4 تتضمن عمليتين (تربيع و طرح) يمكن إنجازهما مهما كانت قيمة المتغير س من ح .

نقول إن الدالة تا معرفة في ح و نكتب : ف$_{تا}$ = ح

• تعيين ف$_{ها}$:

لدينا : ها (س) = $\frac{2}{س - 1}$

لاحظ أن العبارة $\frac{2}{س - 1}$ تتضمن عمليتين (طرح ثم قسمة) الطرح يمكن إجراؤة مهما كان س من ح و لكن قسمة 2 على س -1 لا يمكن إنجازها من أ جل

س - 1 = 0 أي س = 1 إذن الدالة ها معرفة في المجموعة ح - { 1 } .

لاحظ أن : مجموعة تعريف الدالة تا هي مجموعة بدءها ح .

إذن تا تطبيق .

لكن مجموعة تعريف الدالة ها هي جزء من مجموعة بدءها إذن ها ليست تطبيقا .

تمرين 2 :

تا تطبيق معرف كما يلي :

تا: ح ⟵ ح

س ⟼ ع = 2 س + 3

بيّن أن تا يقبل تطبيقا عكسيا $تا^{-1}$

استنتج عبارة $تا^{-1}$ (ع) .

الحل :

يقبل تا تطبيقا عكسيا إذا كان تا تقابلا .

فلنبين أن تا تقابل .

تا تقابل معناه (المعادلة تا (س) = ع ذات المجهول س تقبل حلا وحيدا في ح)

لدينا : ع = 2 س + 3 ⟺ 2 س = ع − 3

$$⟺ س = \frac{ع - 3}{2}$$

فمن أجل كل قيمة للعنصر ع من ح نحصل على قيمة وحيدة للعنصر س .

إذن المعادلة ع = 2 س + 3 تقبل حلا وحيدا في ح هو :

$$س = \frac{ع - 3}{2}$$

وبالتالي تا تقابل .

إذن تا يقبل تطبيقا عكسيا $تا^{-1}$ معرفا كما يلي :

$تا^{-1}$: ح ⟵ ح

$$ع ⟼ س = \frac{ع - 3}{2} .$$

تمارين

• الدوال

1 تا دالة معرفة كما يلي :

تا : ح ⟵ ح

س ⟼ تا (س) = 3 س

- احسب كلا من : تا (2) ؛ تا(3) ؛ تا (0) ؛ تا (-1) ؛ تا $(-\frac{1}{2})$

تا($\sqrt{2}$) .

- س ، ص ، هـ أعداد حقيقية .

اكتب عبارة كل من تا (ص)؛ تا ($س^2$) ؛ تا (س + هـ) ؛ تا (- س) ؛ تا (2 س + 3) .

2 نفس التمرين لكل من الدوال .

1) س ⟼ 5 س - 1

2) س ⟼ $\frac{5}{س}$

3) س ⟼ 5 $س^2$ - 3 س + 4

4) س ⟼ (س - 2) (2 س + 3)

5) س ⟼ $\frac{3 + س}{2 - س}$

6) س ⟼ $\sqrt{س^2 - س - 1}$

3 **عيّن مجموعة التعريف لكل من الدوال الاتية من ح إلى ح**

1) س ⟼ $س^2$ - 3 س + 7

2) س ⟼ $\frac{س^2}{5}$ + 2 س − 1

3) س ⟼ (س − 3) . (2 س − 5)

4) س ⟵ $\frac{5}{س}$

5) س ⟵ $\frac{3س - 6}{س - 1}$

6) س ⟵ $\frac{5س - 1}{س^2 - 1}$

7) س ⟵ $\frac{5س - 1}{س^2 + 1}$

8) س ⟵ $\frac{س^2 - 5س}{س^2 - 2س + 1}$

9) س ⟵ $\sqrt{2س - 4}$ ؛ 10) س ⟵ $\sqrt{|س^2 - 2س|}$

11) س ⟵ $\sqrt{|س|} + \sqrt{س - 2}$ ؛ 12) س ⟵ $\sqrt{س - 2} + \sqrt{س - 5}$

• **التطبيقات**

4 لتكن المجموعتان :

ق = { 3 ، 4 ، 5 ، 6 ، 7 }

ك = { عبد الرحمن ؛ أحمد ؛ إبراهيم ؛ عمر ؛ مصطفى }

ع علاقة معرفة من ق إلى ك كما يلي :

ع (س ، ع) ⟺ س هو عدد حروف ع

1) هل ع تطبيق ؟

2) عيّن بيان هذه العلاقة و مثلها سهميا و بيانيا .

5 لتكن : م = { 0 ، 2 ، 4 ، 6 ،......} مجموعة الأعداد الطبيعية الزوجية

و مَ = { 0 ، 3 ، 6 ، 9 ، .....} مجموعة مضاعفات العدد 3 .

ع علاقة من م إلى مَ معرفة كما يلي :

ع (س ، ع) ⟺ ع = 3 س

1) تحقق أن ع تطبيق من م إلى مَ

2) هل هذا التطبيق تقابلي ؟

6 لتكن المجموعتان :

ق = { 0 ، 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5 ، 6 ، 7 ، 8 ، 9 } و ك = { 0 ، 1 ، 2 }

ع علاقة من ق إلى ك معرفة كما يلي :

ع (س ، ع) ⟺ ع هو باقي قسمة س على 3 .

1) بيّن أن أن ع تطبيق

2) هل هذا التطبيق متباين ؟

7 لتكن المجموعة ق حيث

ق = { 0 ، 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5 ، 6 ، 7 }

أ) $ع_1$ علاقة معرفة في ق كما يلي :

$ع_1$ (س، ع) ⟺ ع = $\frac{2س + 1}{3}$

- بيّن أ ن $ع_1$ تطبيق ؟
- هل هذا التطبيق متباين ؟ هل هو غامر ؟

ب) $ع_2$ علاقة معرفة في ق كما يلي :

$ع_2$ (س ، ع) ⟺ ع = $\frac{7س - س^2}{2}$

- بيّن ان $ع_2$ تطبيق
- هل هذا التطبيق غامر ؟

8 لتكن المجموعتان :

ق = { أ ،ب ، ج ، د ،هـ } ؛ ك = { 2 ،3 ، 5 ، 9 }

ع علاقة من ق إلى ك معرفة ببيانها :

ب ع = { (أ ، 2) ، (ب ، 3) ، (ج ، 2) ، (د ، 5) ، (هـ ، 9) }

1) بيّن أن ع تطبيق

2) هل ع متباين ؟ هل ع غامر ؟

9 تا تطبيق معرف كما يلي :

تا : ط ⟶ ط

س ⟼ ع = س + 2

بيّن أن تا متباين .

هل التطبيق تا غامر ؟ هل هو تقابلي ؟

10 تا تطبيق معرف كما يلي :

تا : $ح^+ \longrightarrow ح^+$

س $\longmapsto$ ع = $\sqrt{س}$

- تحقق أن تا متباين ؟ هل تا غامر ؟

11

تا$_1$: **ص** $\longrightarrow$ **ص** ؛ تا$_2$: **ص** $\longrightarrow$ **ص** ؛ تا$_3$: **ص** $\longrightarrow$ **ص**

س $\longmapsto$ ع = س + 1 ؛ س $\longmapsto$ 5 س + 1 ؛ س $\longmapsto$ ع = $س^2$

1) هل التطبيقات تا$_1$ ، تا$_2$ ، تا$_3$ متباينة ؟ هل هي غامرة ؟

2) أوجد عبارة التطبيق العكسي لكل من هذه التطبيقات إن وجد .

12 تا تطبيق للمجموعة ح في ح معرف كما يلي :

تا: ح $\longrightarrow$ ح

س $\longmapsto$ تا (س) = $س^2 - 1$

بيّن أن تا غير متباين .

13 ط هي مجموعة الأعداد الطبيعية .

ليكن تا$_1$ و تا$_2$ تطبيقان للمجموعة $ط^2$ في ط معرفان كما يلي :

تا$_1$: **ط × ط** $\longrightarrow$ **ط** ؛ تا$_2$: **ط × ط** $\longrightarrow$ **ط**

(س ، ع) $\longmapsto$ س + ع (س ، ع) $\longmapsto$ س×ع

بيّن أن تا$_1$ متباين و أن تا$_2$ غامر .

14 ح هي مجموعة الأعداد الحقيقية .

ليكن تا$_1$ و تا$_2$ تطبيقان للمجموعة ح في ح معرفان كما يلي :

تا$_1$: **ح** $\longrightarrow$ **ح** ؛ تا$_2$: **ح** $\longrightarrow$ **ح**

س $\longmapsto$ ع = 2 س + 1 ؛ س $\longmapsto$ ع = $\frac{س + 1}{س}$

بيّن أن تا$_1$ غامر و أن تا$_2$ غير غامر .

15 تا تطبيق للمجموعة ص في $ص^+$ معرف كما يلي :

تا : **ص** $\longrightarrow$ **$ص^+$**

س $\longmapsto$ ع = $س^2$. بيّن أن تا ليس متباينا و ليس غامرا .

16 تا تطبيق معرف كما يلي :

تا : ح - { 5 } $\longrightarrow$ ح - { 2 } . س $\longmapsto$ ع = $\frac{2 س + 1}{س - 5}$

1) بيّن أن تا متباين و غامر . 2) عيّن التطبيق العكسي $تا^{-1}$.

13 كثيرات الحدود

I. أنشطة

• نشاط 1 :

وحيد الحد لمتغير حقيقي س

تا و ها دالتان من ح إلى ح معرفتان كما يلي :

تا : ح ⟵ ح   ها : ح ⟵ ح

س ⟼ تا(س) = $\frac{1}{2}$س   س ⟼ ها(س) = - 5س^2

1) أحسب كلا من الأعداد الحقيقية :

تا(0) ؛ تا(-1) ؛ تا(1+$\sqrt{2}$) .

ها(0) ؛ ها(- $\frac{1}{2}$) ؛ تا(1-$\sqrt{3}$)

2) ما هي العمليات الواردة في كل من العبارتين الجبريتين $\frac{1}{2}$س وَ –5س^2 ؟.

• تحقق أن كلا من هاتين العبارتين هي من الشكل :

أ س^{ن} حيث : أ ∈ ح ، ن ∈ ط و س متغير حقيقي.

الدالة تا التي ترفق كل عدد حقيقي س بالعدد الحقيقي أ س^{ن} تسمى دالة وحيد الحد للمتغير الحقيقي س.

كل عدد حقيقي من الشكل أ س^{ن} يسمى وحيد الحد للمتغير الحقيقي س

- العدد الحقيقي أ يسمى معامل وحيد الحد أ س^{ن}.
- إذا كان أ ≠ 0 فالعدد الطبيعي ن يسمى درجة وحيد الحد أ س^{ن}.
- إذا كان أ = 0 فالعدد 0 س^{ن} هو وحيد الحد المعدوم 0
- كل من $\frac{1}{س}$ و 2$\sqrt{س}$ ليس وحيد حد . لماذا ؟

• العملية الوحيدة الواردة في أي وحيد حد هي الضرب في ح.

• نشاط 2 : وحيد الحد لمتغيرين حقيقيين س وَ ع :

تا دالة معرفة من ح^2 إلى ح كما يلي:

تا : ح^2 ⟵ ح ، (س ، ع) ⟼ تا (س ، ع) = 3 س ع^2

1) احسب كلا من: تا(1 ،2) ؛تا(0 ،-3)
2) ما هي العمليات الواردة في العبارة الجبرية 3 س $ع^2$ ؟
• تحقق أن العبارة الجبرية 3 س $ع^2$ هي من الشكل أ $س^ن$ $ع^هـ$
• الدالة التي ترفق كل ثنائية (س ،ع) من $ح^2$ بالعدد الحقيقي أ $س^ن$ $ع^هـ$ تسمى دالة وحيد حد للمتغيرين س و ع.
• العدد الحقيقي أ $س^ن$ $ع^هـ$ يسمى وحيد حد للمتغيرين س و ع.
- العدد الحقيقي أ يسمى معامل وحيد الحد أ $س^ن$ $ع^هـ$
- إذا كان أ≠ 0 فالعدد الطبيعي ن يسمى درجة وحيد الحد أ $س^ن$ $ع^هـ$ بالنسبة للمتغير س
و العدد الطبيعي هـ يسمى درجة وحيد الحد أ $س^ن$ $ع^هـ$ بالنسبة للمتغير ع.
العدد (ن+هـ) يسمى درجة وحيد الحد أ $س^ن$ $ع^هـ$ بالنسبة للمتغيرين س و ع.

• نشاط 3 : وحيدات الحد المتشابهة .
لتكن وحيدات الحد الآتية:
تا(س)= -2$س^3$ ؛ ها(س)=(1- $\sqrt{2}$)$س^4$ ؛ حا(س)= $\sqrt{5}$ $س^3$
- ما هو معامل و درجة كل من وحيدات الحد هذه ؟
- ما هي وحيدات الحد التي لها نفس الدرجة ؟
ـ نقول عن وحيدي حد للمتغير س إنهما متشابهان إذا كان لهما نفس الدرجة.
مثلا: - $س^2$ و $\frac{1}{4}$ $س^2$ متشابهان
- $س^2$ و $\frac{1}{4}$$س^3$ غير متشابهين

• نشاط 4 : تبسيط كتابة وحيد حد
- بما أن كل وحيد حد هو عدد حقيقي ، فإن قواعد الحساب في ح تبقى صالحة.
- أكتب على الشكل المبسط أ $س^ن$ أو أ $س^ن$ $ع^هـ$ كلا مما يلي:

1) 2$س^2$ + 3 $س^2$ ؛ 2) -5$س^3$ + $\frac{1}{2}$$س^3$

3) ($\frac{1}{2}$$س^4$).($\sqrt{2}$ س) ؛ 4) ($\frac{\sqrt{2}}{2}$ $س^3$ $)^2$

5) - س ع + 3 س ع ؛ 6) $\frac{1}{4}$$س^2$$ع^2$ + $\frac{\sqrt{2}}{4}$ $ع^2$ $س^2$

7) $(\frac{1}{4}$ س^{2}ع$^3)$.(4 س^{2}ع$)$

هل يمكن تبسيط المجموع الجبري: 2س^3 + 4س^2 ؟ لماذا ؟

. نشاط 5 : مجموع وحيدات حد غير متشابهة

لتكن المجاميع الجبرية التالية:

تا(س)= $\frac{1}{2}$س^2 +2س^2

ها(س)= س^3- 2س^2 +1

حا(س)= س^4- س^3

- تا(س) هو وحيد حد. لماذا ؟
- كل من ها(س) و حا(س) ليس وحيد حد. لماذا ؟
- مجموع وحيدات حد متشابهة هو وحيد حد.
- مجموع وحيدات حد غير متشابهة ليس وحيد حد ، فهو كثير حدود

مثلا: كل من ها(س) و حا(س) هو كثير حدود .

2. كثيرات الحدود

1) تعاريف

• تعريف :

كثير الحدود للمتغير الحقيقي س هو مجموع وحيدات حد للمتغير س . ليست كلها متشابهة .

نرمز إلى كثير الحدود للمتغير س برمز مثل :

تا (س) ، ك (س) ، أ (س) أوإختصارا ك ، ل ، أ .....

مثال :

ك (س) = 5 س^2 + 3 س – 6 – 2 س^2 – 4 س + 2 هو كثير حدود .

ك (س) هو مجموع وحيدات حد بعضها متشابهة . لنبسطه .

ك (س) = 5 س^2+ 3 س – 6 – 2 س^2 – 4 س + 2

بتجميع وحيدات الحد المتشابهة نجد :

ك (س) = (5 س^2 – 2 س^2) + (3 س – 4 س) + (- 6 + 2)

ك (س) = 3 س^2 – س – 4

- نقول إننا بسطنا ك(س) و رتبناه حسب القوى المتناقصة للمتغير س .
- وحيدات الحد : 3 س^2 ، - س ، - 4 تسمى حدود كثير الحدود ك (س) .
- الأعداد الحقيقية : 3 ، - 1، - 4 ، تسمى معاملات كثير الحدود ك(س)
- درجة كثير الحدود ك(س) هي درجة وحيد الحد الأعلى درجة 3 س^2 أي 2

- **كثير الحدود المعدوم**

كثير الحدود المعدوم هو كثير الحدود الذي كل معاملاته معدومة .

كتابة كثيرات الحدود :

يكتب كل كثير حدود ك (س) غير معدوم على الشكل المبسط و المرتب التالي :

ك(س) = أ$_{ن}$ س^{ن}+ أ$_{ن-1}$ س$^{ن-1}$ + ... + أ$_2$س^2 + أ$_1$ س^1 + أ$_0$ مع

أن $\neq 0$

- العدد الطبيعي ن هو درجة ك (س) .
- الأعداد الحقيقية أ$_{ن}$ ، أ$_{ن-1}$ ،......، أ$_0$ هي معاملات ك(س) .

أمثلة :

أ (س) = 2 س + 1 هو كثير حدود من الدرجة الأولى :

ب (س) = 3 س^2 – س + 2 هو كثير حدود من الدرجة الثانية

جـ (س)= س^3 – 2 س + 1 هو كثيرحدود من الدرجة الثالثة .

- **تساوي كثيري حدود :**

تعريف :

يتساوى كثيرا حدود مبسطان تا (س) ، ها (س) إذا وفقط إذا كانا من نفس الدرجة و كان معاملا كل حدين متشابهين فيهما متساويين .
ونكتب : $\forall$ س $\in$ ح : تا (س) = ها (س)

مثال :

ليكن : تا (س) = أ س^2 – 3 س + جـ

و ها (س) = 2 س^2 + ب س – 1

و لنعين قيم المعاملات أ ، ب ، جـ بحيث :

$\forall$ س $\in$ ح : تا (س) = ها (س) .

تا (س) و ها (س) كلاهما من الدرجة الثانية و بالتالي يكون

تا (س) = ها (س) من أجل :

أ = 2 ، ب = - 3 ، جـ = - 1

نقول إننا حصلنا على أ ، ب ، جـ بالمطابقة

3 . العمليات على كثيرات الحدود

قواعد الحساب وخواص العمليات في ح تبقى صالحة للعمليات على كثيرات الحدود

ا) جمع و طرح كثيرات الحدود

مثال 1 : ليكن : ك = 4 س^3 – 5 س^2 + 7 س – 2

ل = س^2 – 5 س + 3

لنحسب المجموع ك +ل : لدينا :

ك + ل = (4 س^3 – 5 س^2 +7 س – 2)+(س^2 – 5 س + 3)

= 4 س^3 – 5 س^2 + 7 س – 2 + س^2 – 5 س + 3

(حذف الأقواس)

= 4 س^3 + (- 5 س^2 + س^2) + (7 س – 5 س) + (- 2 + 3)

(التبديل ثم التجميع)

= 4 س^3 + (- 4 س^2) + (+2 س) + 1

ك + ل = 4 س^3 - 4 س^2 + 2 س + 1)

يمكن إستعمال الوضع التالي :

بعد تبسيط و ترتيب ك و ل ، نكتب كلا منهما في سطر بحيث تكون الحدود المتشابهة تحت بعضها البعض ، ثم نجمع هذه الحدود المتشابهة وذلك كما يلي :

ك = 4 س^3 – 5 س^2 + 7 س – 2

ل = س^2 – 5 س + 3

ك + ل = 4 س^3 – 4 س^2 + 2 س + 1

- مجموع كثيري حدود هو كثير حدود ، درجته هي درجة كثير الحدود الأعلى درجة أو أصغر منها

مثال 2 : أ ، ب كثيرا حدود حيث :

أ = 3 س^4 + 4 س^3 – 5 س + 7

ب = - س^4 + 2 س^2 – 6 س – 2

لنحسب الفرق أ – ب

لدينا :

(أ – ب) = (3 س^4 + 4 س^3 – 5 س + 7) – (- س^4 + 2 س^2 – 6 س – 2)

= 3 س^{4} + 4 س^{3} − 5 س + 7 + س^{4} − 2 س^{2} + 6 س + 2

(حذف الأقواس)

= (3 س^{4} + س^{4}) + 4 س^{3} − 2 س^{2} + (− 5 س + 6 س) + (7 + 2)

(أ − ب) = 4 س^{4} + 4 س^{3} − 2 س^{2} + س + 9

و باستعمال الوضع العملي السابق يكون :

أ = 3 س^{4} + 4 س^{3} - 5 س + 7

- ب = س^{4} - 2 س^{2} + 6 س + 2

أ − ب = 4 س^{4} + 4 س^{3} − 2 س^{2} + س + 9

فزق كثيري حدود هو كثير حدود درجته هي درجة كثير الحدود الأعلى درجة أو أصغر منها

مثال 3 :

أ، ب ، جـ كثيرات حدود حيث :

أ = س^{4} − 3 س^{3} − 5 س^{2} + 2 س − 3

ب= س^{2} − 3 س + 1

جـ = س^{3} − 4 س + 7

لنحسب المجموع أ + ب- جـ

لدينا : - جـ = - س^{3} + 4 س − 7

و باستعمال الوضع العملي السابق يكون

أ = س^{4} − 3 س^{3} − 5 س^{2} + 2 س − 3

ب =   + س^{2} − 3 س + 1

- جـ =   - س^{3} + 4 س − 7

أ + ب − جـ = س^{4} − 4 س^{3} − 4 س^{2} + 3 س − 9

بصفة عامة :

مجموع كثيرات حدود هو كثير حدود ، درجته هي درجة كثير الحدود الأعلى درجة أو أ صغر منها

خواص عملية جمع كثيرات الحدود في ح

- الجمع تبديلي و تجميعي
- كثير الحدود المعدوم هو العنصر الحيادي للجمع
- لكل كثير حدود تا (س) نظير هو - تا (س)

2) ضرب كثيرات الحدود

مثال 1

لنحسب الجداء أ × ك حيث :

ك = س^2 – 4 س + 2

أ = 5 س^2

لدينا : أ • ك = 5 س^2 • (س^2 – 4 س + 2)

ضرب وحيد حد في مجموع وحيدات حد توزيعي على الجمع لأن الضرب توزيعي على الجمع في ح أي :

أ • ك = (5 س^2) • س^2 + (5 س^2) • (- 4 س) + (5 س^2) • (+2)

أ • ك = 5 س^4 – 20 س^3 + 10 س^2

بصفة عامة :

جداء وحيد حد أ و كثير حدود ك هو مجموع جداءات أ وكل حد من حدود ك

مثال 2 :

لنحسب الجداء ك× ل حيث :

ك = 3 س^4 + 5 س^2 + 2 س – 1

ل= س^2 – 2 س + 2

لحساب هذا الجداء نستعمل الوضع التالي :

ك = 3 س^4 + 5 س^2 + 2 س – 1

ل = س^2 – 2 س + 2

س^2 × ك = 3 س^6 + 5 س^4 + 2 س^3 – س^2

- 2 س × ك = - 6 س^5 - 10 س^3 – 4 س^2 + 2 س

2 × ك = + 6 س^4 + 10 س^2 +4س - 2

ل × ك = 3 س^6 – 6 س^5 + 10 س^4 – 8 س^3 + 5 س^2 + 6 س – 2

• جداء كثيري حدود هو كثير حدود ، درجتة هي مجموع درجتيهما

• خواص عملية ضرب كثيرات الحدود في ح :

- الضرب تبديلي و تجميعي
- الضرب توزيعي على الجمع
- كثير الحدود 1س° أي 1 هو العنصر الحيادي للضرب

3) قسمة كثيرات الحدود

- قسمة كثير حدود على وحيد حد .

- لتكن المساواة :

$$\underbrace{\left(\frac{3}{2}\text{س}^3 + 2\text{س}^2 - 4\text{س}\right)}_{\text{ل(س)}} \times (8\text{س}^2) = \underbrace{12\text{س}^5 + 16\text{س}^4 - 32\text{س}^3}_{\text{ك(س)}}$$

لاحظ أن 8 س^2 يقسم كل حد من حدود ك (س) .

فلدينا : 12 س^5 : 8 س^2 = $\frac{3}{2}$ س^3

16 س^4 : 8 س^2 = 2 س^2

- 32 س^3 : 8 س^2 = - 4 س

نكتب : $\underbrace{12\text{س}^5 + 16\text{س}^4 - 32\text{س}^3}_{\text{ك(س)}} : 8\text{س}^2 = \underbrace{\frac{3}{2}\text{س}^3 + 2\text{س}^2 - 4\text{س}}_{\text{ل(س)}}$

إذن هناك كثير حدود ل(س) بحيث : 8 س^2 × ل (س) = ك (س)

نقول إن ك(س) يقبل القسمة على 8 س^2 .

ل(س) هو حاصل القسمة التام لكثير الحدود ك (س) على 8 س^2

- ليكن ك(س) = 12 س^5 – 32 س^3 +16 س

ك(س) لا يقبل القسمة على 8 س^2 لأن 8 س^2 يقسم كلا من 12 س^5 و – 32 س^3 لكنه لا يقسم 16 س

ومنه القاعدة العملية :

> **يقبل كثير الحدود ك(س) القسمة على وحيد الحد أ(س) إذا و فقط إذا كان كل حد من حدود ك(س) يقبل القسمة على أ(س)**
> **ولإيجاد حاصل قسمة ك(س) على أ(س) نقسم كل حد من ك(س) على أ(س) ، ثم نجمع الحواصل**

مثال 1 : لنحسب حاصل قسمة 4 س^3 – 8 س^2 – 2 س على – 2 س

لدينا : 4 س^3 : (- 2 س) = - 2 س^2

- 8 س^{2} : (- 2 س) = 4 س
- 2 س : (- 2 س) = 1
إذن : (4 س^{3} – 8 س^{2} – 2 س) : (- 2 س) = - 2 س^{2} + 4 س + 1

مثال 2 :

4 س^{3} – 8 س^{2} – 2 لا يقبل القسمة على – 2 س لأن الحد (- 2) لا يقبل القسمة على (- 2 س)

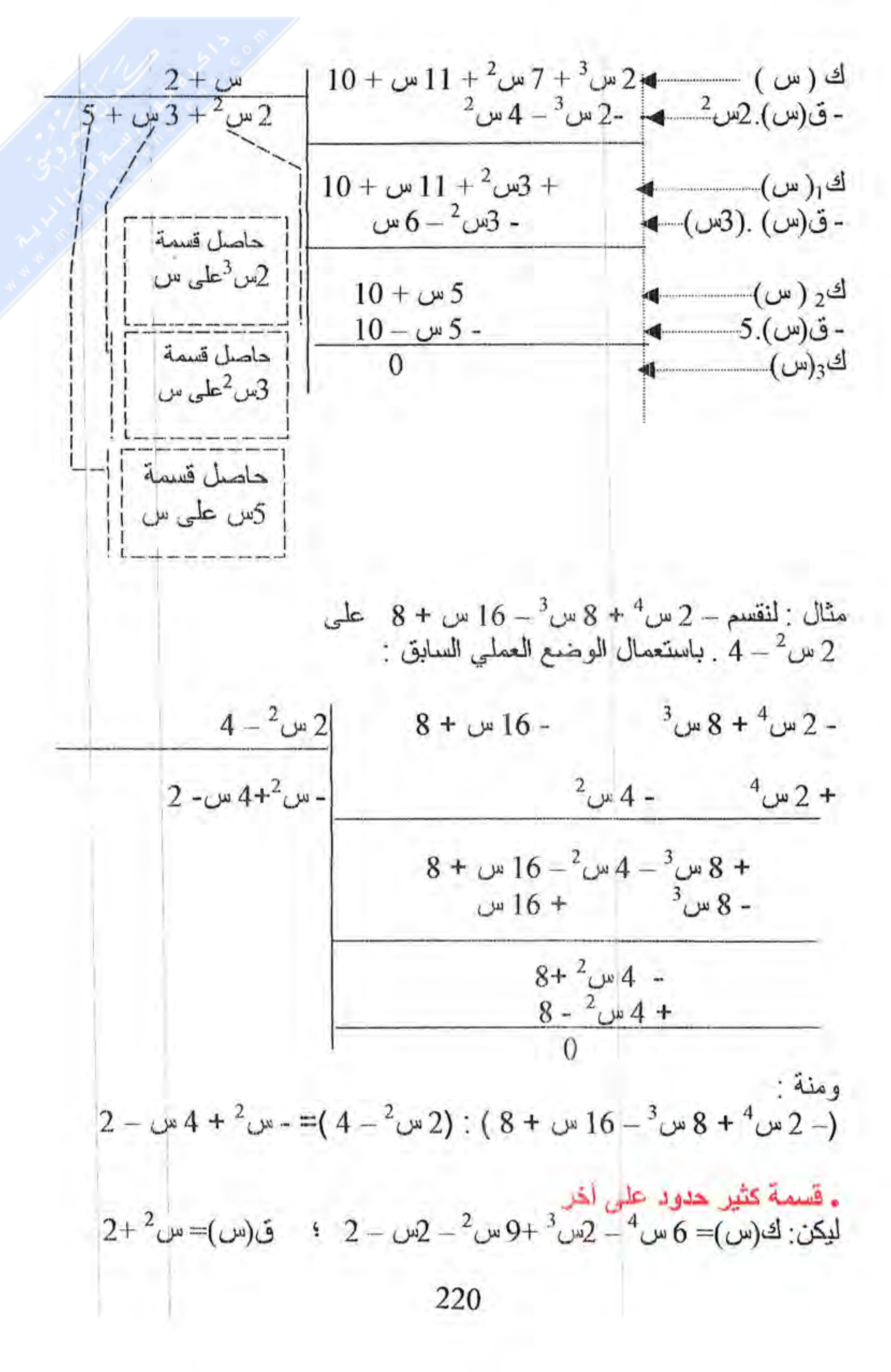
. القسمة التامة لكثير حدود على آخر :

ليكن : ك (س) = 2 س^{3} + 7 س^{2} + 11 س + 10
ق (س) = س + 2
هل يوجد كثير حدود ل (س) بحيث ؛ ك (س) = ق (س) . ل (س) ؟
ك (س) من الدرجة 3
ق (س) من الدرجة 1
إذن ل (س) ، إن وجد ، سيكون من الدرجة 2 أي من الشكل :
أ س^{2} + ب س + جـ و يحقق المساواة ؛
ك (س) = ق (س) . ل (س)
أي : 2 س^{3} + 7 س^{2} + 11 س + 10 = (س + 2) . (أ س^{2} + ب س + جـ)
= (س . أ س^{2}) + (س . ب س) + (س . جـ) + 2 أ س^{2} + 2 ب س + 2 جـ
= أ س^{3} + (2 أ + ب) س^{2} + (2 ب + جـ) س + 2 جـ
(ها(س))

وبالمطابقة بين ها (س) و ك (س) نجد :

أ = 2	أي :	أ = 2
2 أ + ب = 7		ب = 7 – 2 أ = 3
2 ب + جـ = 11		جـ = 11 – 2 ب = 5
2 جـ = 10		جـ = 5

وبالتالي يوجد كثير حدود من الدرجة الثانية ، هو :
ل (س) = 2 س^{2} + 3 س + 5
إذن : ك (س) يقبل القسمة على ق (س)
نكتب ؛ (2 س^{3} + 7 س^{2} + 11 س + 10) : (س + 2) = 2 س^{2} + 3 س + 5
وعمليا نستعمل الوضع التالي لإيجاد حاصل قسمة 2 س^{3} + 7 س^{2} + 11 س + 10 على س + 2 :



ك (س)	2 س^{3} + 7 س^{2} + 11 س + 10	س + 2
- ق(س).2س^{2}	-2 س^{3} − 4 س^{2}	2 س^{2} + 3 س + 5
ك$_{1}$(س)	+ 3س^{2} + 11 س + 10	
- ق(س) .(3س)	- 3س^{2} − 6 س	
ك$_{2}$ (س)	5 س + 10	
- ق(س).5	- 5 س − 10	
ك$_{3}$(س)	0	

مثال : لنقسم − 2 س^{4} + 8 س^{3} − 16 س + 8 على 2 س^{2} − 4 . باستعمال الوضع العملي السابق :

- 2 س^{4} + 8 س^{3} - 16 س + 8	2 س^{2} − 4
+ 2 س^{4} - 4 س^{2}	- س^{2}+4 س- 2
+ 8 س^{3} − 4 س^{2} − 16 س + 8	
- 8 س^{3} + 16 س	
- 4 س^{2} +8	
+ 4 س^{2} - 8	
0	

ومنة :

(− 2 س^{4} + 8 س^{3} − 16 س + 8) : (2 س^{2} − 4)= - س^{2} + 4 س − 2

• قسمة كثير حدود على آخر

ليكن: ك(س)= 6 س^{4} − 2س^{3} +9 س^{2} − 2س − 2 ؛ ق(س)= س^{2} +2

لنقسم ك(س) على ق(س) باستعمال الوضع العملي السابق:

$6س^4 - 2س^3 + 9س^2 - 2س - 2$	$س^2 + 2$
$-6س^4 \qquad -12س^2$	$6س^2 - 2س - 3$
$-2س^3 - 3س^2 - 2س - 2$	
$+2س^3 \qquad + 4س$	
$-3س^2 + 2س - 2$	
$+3س^2 \qquad + 6$	
$+2س + 4$	

لاحظ أن درجة $2س + 4$ أصغر من درجة القاسم .
و بالتالي لا يمكن متابعة القسمة.
إذن ك(س) لا يقبل القسمة على ق(س).
و نكتب : ك(س) = ق(س) . $(6س^2 - 2س - 3) + (2س + 4)$

المقسوم ← ك(س)، القاسم ← ق(س)، الحاصل ← $(6س^2 - 2س - 3)$، الباقي ← $(2س + 4)$

ومنه النتيجة العامة :

> ك(س) و ق(س) كثيرا حدود بحيث :
> (ق(س) $\neq 0$) و (درجة ك(س) $\leq$ درجة ق(س))
> يوجد كثيرا حدود ل(س) و ب(س) بحيث :
> ك(س) = ق(س) × ل(س) + ب(س)
> و درجة ب(س) < درجة ق(س)

ك(س) هو المقسوم
ق(س) هو القاسم
ل(س) هو الحاصل
ب(س) هو الباقي
العملية التي ترفق كثيري الحدود ك(س) و ق(س) بكثيري الحدود ل(س) و ب(س) تسمى القسمة الاقليدية لكثيرات الحدود .

ملاحظة :

إذا كان الباقي ب(س) معدوما فالقسمة تامة أي :

ك(س) = ق(س) × ل(س)

. قابلية القسمة على س -α

- جذر كثير حدود

ليكن تا(س) = س^2- 6 س +5

و لنحسب تا(5) :

تا(5) = $5^2 - (6\times5) + 5$

$= 0$

تا(س) ينعدم من أجل س = 5

نقول إن العدد 5 هو جذر لكثير الحدود س^2- 6 س +5 .

- لنحسب تا(-3) :

تا(-3) = (-3)^2 −(6)(-3)+5 = $32 \neq 0$

العدد (-3) ليس جذرا لكثير الحدود س^2- 6 س +5 وبصفة عامة

يكون العدد الحقيقي α جذرا لكثير الحدود تا(س) إذا وفقط إذا كان تا(α) = 0

α جذر لكثير الحدود تا(س) ⟺ تا(α) = 0

مثال : تا(س) = س^2 − 1

لدينا : تا(1) = 0 و تا(-1) = 0

فكل من (-1) و (+1) هو جذر لكثير الحدود تا(س) بينما العدد 0 ليس جذرا له

لأن تا(0) ≠ 0

- قابلية قسمة كثير حدود على س-α

نقبل الخاصية التالية :

يكون كثير الحدود تا(س) قابلا للقسمة على س - α إذا و فقط إذا كان تا(α) =0

مثال 1 :

ليكن : تا(س) = س^2 - 6 س + 5

لدينا : تا(5) =0

إذن تا(س) يقبل القسمة على س - 5

أي يوجد كثير حدود ك(س) بحيث : تا(س)=(س − 5) . ك(س)

ك(س) هو حاصل قسمة تا(س) على (س − 5).

لنبحث عن ك(س).

بما أن تا(س) من الدرجة الثانية و (س − 5) من الدرجة الأولى فإن ك(س) يكون

من الدرجة الأولى ،أي أن ك(س) من الشكل أ س+ ب.
فالبحث عن ك(س) يؤول إلى البحث عن العددين الحقيقيين أ ، ب.
لدينا : تا(س)= (س – 5).(أ س+ ب)

= أ س ^{2} +ب س – 5أس – 5ب (نشر)

= أ س ^{2} + (ب – 5أ) س – 5ب

بالمطابقة بين عبارتي تا(س) أي :

أ س ^{2} + (ب – 5 أ) س – 5ب= س ^{2} – 6 س + 5

نجد :

أ = 1 و ب - 5 أ = - 6 و - 5 ب = 5

أي : أ = 1 و ب = - 1 و ب - 5أ = - 6

و بما أن ب - 5 أ = - 6 محققة من أجل أ=1 و ب= -1

فإن العددين المطلوبين هما : أ = 1 و ب = - 1

ومنه ك(س) = س - 1

إذن تا(س) = (س - 5) (س - 1)

يمكن الحصول على ك(س) باستعمال الوضع العملي :

س ^{2} – 6 س + 5	س - 5
- س ^{2} + 5 س	س - 1
- س + 5	
س - 5	
0	

و نكتب : تا(س) = (س - 5) (س - 1)

مثال 2 : العدد –2 هو جذر لكثير الحدود 2س ^{3} + 7 س ^{2} + 11 س + 10

لنعين حاصل قسمته على س + 2

باستعمال الوضع العملي نجد :

2س ^{3} + 7 س ^{2} + 11 س + 10	س + 2
- 2 س ^{3} - 4 س ^{2}	2 س ^{2} + 3 س + 5
3 س ^{2} + 11 س + 10	
- 3 س ^{2} - 6 س	
5 س + 10	
- 5 س - 10	
0	

4 . تحليل كثير حدود

تحليل كثير حدود يعني كتابته على شكل جداء عوامل .
نقدم فيما يلي بعض الطرق لتحليل كثير الحدود .

1) **إخراج العامل المشترك :**

مثال 1 :
لنحلل ك(س) = 5 أ س - 5 ب س
لاحظ أن 5س عامل مشترك للحدين :
أي : ك(س) = (5 س) . أ - (5 س) . ب
ومنه : ك(س) = 5 س (أ - ب)

مثال 2 :
لنحلل ك(س) = 3 س^2 + س - 2 س^3
س عامل مشترك لكل الحدود .
ومنه : 3 س^2 + س - 2 س^3 = س (3 س + 1 - 2 س^2)

2) **استعمال الجداءات الشهيرة**

مثال 1 :
لنحلل : ك(س) = س^2 + 4 س + 4
لدينا : ك(س) = س^2 + 2 (2 . س) + 2^2
فهو من الشكل أ^2 + 2 أ ب + ب^2 الذي يكتب (أ +ب)^2
و منه : س^2 + 4 س + 4 = (س + 2)^2

مثال 2 :
لنحلل ك(س) = 1 - 6 س + 9 س^2
لدينا : ك(س) = 1^2 - 2 (3 . س) + (3 س)^2
فهو من الشكل أ^2 - 2 أ ب + ب^2 الذي يكتب (أ - ب)^2
و منه : 1 - 6 س + 9 س^2 = (1 - 3س)^2

مثال 3 :

لنحلل : ك(س) = س^2 - $\frac{9}{25}$

لدينا : ك(س) = س^2 - $(\frac{3}{5})^2$

فهو من الشكل أ^2 ــ ب^2 الذي يكتب (أ ــ ب).(أ + ب)

ومنه: س^2 ــ $\frac{9}{25}$ = (س - $\frac{3}{5}$).(س+ $\frac{3}{5}$)

2) استعمال قابلية القسمة على س - α

ليكن ك(س) كثير حدود حيث : ك(س)= $2س^3 - س^2 - 18س + 9$

تحقق أن ك$(\frac{1}{2})=0$

إذن ك(س) يقبل القسمة على (س - $\frac{1}{2}$).

و لنبحث عن حاصل قسمة ك(س) على (س - $\frac{1}{2}$).

باستعمال الوضع العملي نجد:

$2س^3 - س^2 - 18س + 9$	س - $\frac{1}{2}$
$-2س^3 + س^2$	$2س^2 - 18$
$-18س + 9$	
$+18س - 9$	
0	

إذن: ك(س)= (س - $\frac{1}{2}$)($2س^2 - 18$)

يمكن متابعة التحليل حيث أن $2س^2 - 18 = 2(س^2 - 9)$

$= 2(س - 3)(س+3)$

فيكون:

ك(س)= 2(س - $\frac{1}{2}$)(س - 3)(س+3)

$= (2س - 1)(س - 3)(س+3)$

5. تطبيقات

1) الكسور الناطقة

ك(س) و ل(س) كثيرا حدود ، ل(س)≠0

النسبة $\frac{ك(س)}{ل(س)}$ تسمى كسرا ناطقا ، بسطه ك(س) و مقامه ل(س)

-إذا كان ك(س)=0 فإن $\frac{ك(س)}{ل(س)}=0$

-إذا كان ل(س)=0 فإن $\frac{ك(س)}{ل(س)}$ غير معرف.

مثال: ل= $\frac{س^2+1}{س-1}$ هو كسر ناطق.

ل غير معرف إذا كان س – 1=0 أي س=1

نقول إن ل معرف في المجموعة : ح – {1}

فالمجموعة : ح – {1} تسمى مجموعة تعريف الكسر الناطق $\frac{س^2+1}{س-1}$

إذا كان $\frac{ك(س)}{ق(س)}$ كسرا ناطقا فإن :

$\frac{ك(س)}{ق(س)} = 0$ ⟺ ك(س) = 0

ق(س) = 0 ⟺ $\frac{ك(س)}{ق(س)}$ غير معرف

2) اختزال كسر ناطق

ليكن الكسر الناطق : ل = $\frac{س^2-4}{س^2+4س+4}$

لاحظ أن : $س^2 - 4 = (س - 2)(س + 2)$

وَ : $س^2 + 4س + 4 = (س + 2)^2$

إذن :

$$\frac{س^2-4}{س^2+4س+4}=\frac{(س-2)(س+2)}{(س+2)^2}$$

فالكسر الناطق ل يكون غير معرف من أجل : $(س+2)^2=0$

أي من أجل $س+2=0$ أي $س=-2$ ويكون معرفا من أجل س∋ح -{-2}

لاحظ أن : س+2 هو عامل مشترك بين البسط و المقام .

و ∀ س∋ح -{-2} : $س+2\neq 0$

وبالتالي يمكن قسمة كل من البسط و المقام على س+2 .

فنحصل على :

$$ل=\frac{س^2-4}{س^2+4س+4}=\frac{(س-2)(س+2)}{(س+2)(س+2)}=\frac{س-2}{س+2}$$

بهذا نقول إننا اختزلنا الكسر ل .

والكسر الناطق $\frac{س-2}{س+2}$ يسمى الكسر المختزل .

3) كتابة كسر ناطق على شكل مجموع كثير حدود و كسر ناطق

ليكن الكسر الناطق :

$$ك=\frac{س^2+س-1}{س+3}$$

الكسر ك غير معرف من أجل $س+3=0$ أي من أجل $س=-3$

إذن ك معرف من أجل : س∋ ح - {-3}

نقسم $س^2+س-1$ على $س+3$

$$\begin{array}{r|l} س^2+س-1 & س+3 \\ \underline{-س^2-3س} & س-2 \\ -2س-1 & \\ \underline{+2س+6} & \\ 5 & \end{array}$$

فبالقسمة الإقليدية نجد :

$$س^2+س-1=(س+3).(س+2)+5 \qquad (1)$$

و ∀ س∋ ح - {-3} : $س+3\neq 0$

وَ بقسمة طرفي (1) على س+3 نجد :

$$\frac{\text{س}^2+\text{س}-1}{\text{س}+3}=\frac{(\text{س}+3).(\text{س}-2)}{\text{س}+3}+\frac{5}{\text{س}+3}$$

وبإختزال الكسر $\frac{(\text{س}+3).(\text{س}-2)}{\text{س}+3}$ يكون :

$$\frac{\text{س}^2+\text{س}-1}{\text{س}+3}=(\text{س}-2)+\frac{5}{\text{س}+3}$$

كثير حدود

كسر ناطق

6. تمرين محلول

لتكن العبارة الجبرية ك(س) = $(\text{س}^2-4)^2-(\text{س}-2)^2$

1) انشر ثم بسط و رتب ك(س) حسب قوى س المتناقصة
2) حلل ك(س) إلى كثيرات حدود من الدرجة الأولى
3) احسب ك(0) وَ ك(-3)
4) اثبت أن ك(س) يقبل القسمة على س - 2

الحل :

1 . نشر وتبسيط وترتيب ك(س) .

لدينا :

$$\text{ك(س)}=(\text{س}^2-4)^2-(\text{س}-2)^2$$
$$=(\text{س}^4-8\text{س}^2+16)-(\text{س}^2-4\text{س}+4)$$
$$=\text{س}^4-8\text{س}^2+16-\text{س}^2+4\text{س}-4$$
$$=\text{س}^4-(8\text{س}^2+\text{س}^2)+4\text{س}+(16-4)$$
$$\text{ك(س)}=\text{س}^4-9\text{س}^2+4\text{س}+12$$

نشر ك(س) هو كثير حدود من الدرجة الرابعة .

2 . تحليل ك(س) إلى كثيرات حدود من الدرجة الأولى :

لدينا : ك(س) = $(\text{س}^2-4)^2-(\text{س}-2)^2$

لاحظ أن :

$\text{س}^2 - 4 = (\text{س} - 2).(\text{س} + 2)$

$\text{ك}(\text{س}) = [(\text{س} - 2).(\text{س} + 2)]^2 - (\text{س} - 2)^2$

$= (\text{س} - 2)^2.(\text{س} + 2)^2 - (\text{س} - 2)^2$

$= (\text{س} - 2)^2[(\text{س} + 2)^2 - 1]$

$= (\text{س} - 2)^2[(\text{س} + 2)^2 - 1^2]$

$= (\text{س} - 2)^2.[(\text{س} + 2) - 1].[(\text{س} + 2) + 1]$

$\text{ك}(\text{س}) = (\text{س} - 2)^2.(\text{س} + 1).(\text{س} + 3)$

3 . حساب ك(0) و ك(-3)

لدينا : $\text{ك}(\text{س}) = \text{س}^4 - 9\text{س}^2 + 4\text{س} + 12$ ....(1)

$= (\text{س} - 2)^2.(\text{س}+1).(\text{س}+3)$ .... (2)

فلحساب ك(0) نستعمل الشكل (1) لأن كل الحدود تنعدم من أجل س=0 ما عدا الحد الثابت 12 . فيكون : $\text{ك}(0) = 12$

و لحساب ك(-3) نستعمل الشكل (2) لأن العدد (-3) يعدم العامل (س+3) و بالتالي يكون الجداء معدوما من أجل س = -3

أي : $\text{ك}(-3) = 0$

4 – قابلية قسمة ك(س) على س - 2

لدينا : $\text{ك}(\text{س}) = (\text{س} - 2)^2(\text{س}+1)(\text{س}+3)$

$\text{ك}(2) = (2-2)^2(2+1).(2+3)$

$\text{ك}(2) = 0$

إذن ك(س) يقبل القسمة على س – 2

وللبحث عن حاصل القسمة ، نستعمل الوضع العملي .

فنجد :

$\text{س}^4 - 9\text{س}^2 + 4\text{س} + 12$	$\text{س} - 2$
$-\text{س}^4 + 2\text{س}^3$	$\text{س}^3 + 2\text{س}^2 - 5\text{س} - 6$
$+2\text{س}^3 - 9\text{س}^2 + 4\text{س} + 12$	
$-2\text{س}^3 + 4\text{س}^2$	
$-5\text{س}^2 + 4\text{س} + 12$	
$+5\text{س}^2 - 10\text{س}$	
$-6\text{س} + 12$	
$+6\text{س} - 12$	
0	

نكتب : $\dfrac{\text{ك}(\text{س})}{\text{س} - 2} = \text{س}^3 + 2\text{س}^2 - 5\text{س} - 6$

تمـــاريـــن

وحيدات الحد

1 عيّن ، من أ جل كل من وحيدات الحد التالية :
- المعامل
- الدرجة بالنسبة للمتغير س
- الدرجة بالنسبة للمتغير ع
- الدرجة بالنسبة للمتغير س و ع .

1) 3س $ع^2$ 2) -$س^2$ $ع^3$

3) $\frac{س ع^3}{4}$ 4) -2$س^3$ $ع^2$

5) - $\frac{2ع^2 س}{5}$ 6) 4 $أ^2$س .(- $\frac{أ}{3}$)

2 أحسب المجاميع الجبرية التالية (س و ع هما المتغيران)

1) 2س $ع^2$ +3 س $ع^2$ +6 س $ع^2$

2) $\frac{2}{3}$ $س^3$ $ع^4$ + $\frac{1}{4}$ $س^3$ $ع^4$ - $\frac{1}{12}$ $س^3$ $ع^4$

3) - $\frac{1}{5}$ أ $ب^2$ س + $\frac{1}{4}$ أ $ب^2$ س + $\frac{11}{20}$ أ $ب^2$ س

3 احسب الجداءات التالية (س و ع هما المتغيران) .

1) (2$س^3$) . (- 2س $ع^2$)

2) (- $\frac{1}{3}$ س ع) . ($\frac{3}{5}$ $س^2$ ع)

3) ($\frac{3}{4}$ $س^2$ أ) . ($\frac{5}{3}$ $أ^2$ س)

4) ($\frac{2}{5}$ $س^2$ $ع^2$) . (- $\frac{5}{4}$ س $ع^2$)

4 احسب مربعات و مكعبات وحيدات الحد التالية .
(المتغيران هما س و ع)

1) $\frac{1}{3}$ $أ^2$س $ع^2$ 2) - $\frac{2س ع^3}{5}$ 3) - $\frac{2}{3}$ أ $س^3$ $ع^2$

5 أحسب حاصل القسمة في كل مما يلي ، حيث س و ع هما المتغيران بفرض القاسم غير معدوم .

1) $(-2س^{4}ع^{2}) \div (3ع س^{2})$

2) $(-\frac{1}{3}س^{4}ع^{2}) \div (-\frac{2}{3}س^{3}ع^{2})$

3) $(س^{3}ع^{2}) \div (-\frac{1}{4}س ع^{2})$

. جمع و طرح كثيرات الحدود لمتغير حقيقي س

6 لتكن كثيرات الحدود

$أ = س^{3} - 4س^{2} + 3س - 1$

$ب = 2س^{3} - 5س^{2} - 4س + 3$

$جـ = -س^{3} + 3س^{2} - 5س - 2$

عيّن المجاميع :

1) أ + ب + جـ

2) ب + جـ – أ

3) جـ + أ - ب

4) أ + ب - جـ

7 أ نجز العمليات التالية :

1. $3س - (2س^{2} + 3) - [(2س + 3س^{2}) - س + 1] - (س - 2)$
2. $(4س^{2} - 3س) + [2 - (س + س^{2}) - 3س^{3}] - [(2س - 1) - س^{3}]$
3. $(أ^{2} - 2) + (أ - 1) - (أ^{3} + 2أ - 4)$
4. $1 - ب^{3} + (ب^{2} + 4) - (ب^{3} + 2ب^{2} - 4ب + 3)$
5. $ع^{3} + (ع^{2} + ع - 1) - (3ع^{2} - ع^{3} + 5)$

8 أنجز الجداءات التالية :

1) $(2س^{3} + س^{2} + 3) . (2س^{2} - س + 1)$

2) $-(1 + س^{3} + س^{2}) . (س - 1)$

3) $(\frac{س^{3}}{2} - \frac{5س^{2}}{4} - 1) . (4س^{2} - 2)$

4) $(س - 2) . (س + 3) . (س + 1)$

5) $(2س^{3} - 1) . (س + 1) . (س^{2} - 2)$

9 أ نجز العمليات التالية :

1) (2 س + 3) . (س^2 + 1) - س^3 - (س^2 +س - 1) . (س + 4)
2) [(س^2 + 1) - 3 س . (س + 2)] . [س - (س^2 + 1)]
3) (س^2 + 1) . (س - 1).(س+1) - (2 س + 2) . (س^2 - 3) . س

10 عيّن الأعداد الحقيقية أ ، ب ، جـ في كل من الحالات التالية علما بأن
∀ س ∈ ح : ك (س) = ل (س)
1) ك (س) = (أ - 2) س^3 - 3 س^2 - 5 (3 - ب) س + جـ
وَ ل (س) = 2 س^3 - 3 س^2 + 2 س - 12
2) ك (س) = (أ + 2) س^3 - 5 (3 - ب) س + جـ
وَ ل (س) = 0
3) ك (س) = (أ + 1) س^2 - ب س + جـ
وَ ل (س) = 2 أ س^2 + س + 2 ب

11 أنجز عمليات القسمة التالية، بفرض القاسم غير معدوم.
1) (9 س^5 + 6س^4 – 2س^3) : 3س^2
2) (12 س^4 – 16س^2 + 20س) :(- 4س)
3) (4 س^3 – 6 س – 3س^2) : 3س
4) (5س – 6 س^2 + 3س^3 – 2س) :(- 3س)

12 أ،ب كثيرا حدود للمتغير الحقيقي س (ب≠0)
تحقق أن أ يقبل القسمة على ب ، ثم عين الحاصل التام لقسمة أ على ب
1) أ= س^2 + 5س+6 وَ ب= س+2
2) أ=2س^2 +14س+24 وَ ب= س – 3
3) أ=3س^3 – 8س^2 +7س – 2 وَ ب=3 س – 2
4) أ= - 3س^2 +5س+س^3 – 6 وَ ب= س^2 – س +3

13 أ ، ب كثيرا حدود للمتغير الحقيقي س ، (ب≠0)
تحقق في كل مما يلي أن أ لا يقبل القسمة على ب ،ثم عين حاصل و باقي قسمة أ على ب.
1) أ= س^3 +6س^2 +3س – 7 وَ ب= س+2
2) أ=2س^3 – 3س^2 – 5 وَ ب=2س+1
3) أ= س – س^3 – 1 – 2س^2 وَ ب=4+2س
4) أ=6س^3 – س^2 +2س – 1 وَ ب=3س – 1

ـ تحليل كثيرات الحدود:

14 أخرج وحيد الحد الأعلى درجة كعامل مشترك في كل من كثيرات الحدود التالية:

1) 8س^3 − 12س^2 + 16س
2) 18س^{2}ع^2 − 12س^2 + 6س ع
3) 2 أس^4 + 5 أ^2 س^3 − 6 أ^4 س^2

15 حلل كلا من العبارات الجبرية التالية:

1) (2س − 3).(5س − 1) − (2س − 3).(س+1)
2) (7س − 1)^2 − (7س − 1).(3س+2)
3) (2س − 3)^2 − (2س − 3).(5س − 7)
4) (4 − 3س).(2+3س) − 2(1 − 2س).(3س − 4)
5) (س − 3).(8س+2) − (2س − 6).(س − 5)
6) 2(4س^2 + 2س) + 3(2س+1)
7) (3س+1).(2س − 3) + (3س+1).(س+2) − (5س+4).(3س+1)
8) (2س+1).(س − 3) + (2س+1).(3س − 4) − (2س+1)^2

16 حلل كثيرات الحدود التالية ، مستعملا الجداءات الشهيرة

1) 9س^2 − 6س + 1
2) س^2 − س + $\frac{1}{4}$
3) 4س^2 + 12س ع + 9ع^2
4) 4س^2 + 4س + 1
5) 16س^2 − 56س + 49
6) 9ب^2 − 6 أ ب + أ^2
7) − س^2 + 6س − 9
8) 2س^2 − 12س + 18
9) 9س^2 + 12س + 4
10) 9س^2 − 4
11) (أ+1)^2 − أ^2
12) (4س+3)^2 − (5س − 1)^2
13) س^2 − 4ع^2
14) (س + $\frac{1}{4}$)^2 − $\frac{49}{16}$
15) (5س+2)^2 − (3س − 6)^2
16) (2س+ع − 4)^2 − (س+ع − 1)^2
17) (2س^2 − 3س − 2)^2 − (س^2 − 3س+2)^2

17 حلل العبارات الجبرية التالية:

1) س^2 − 9 − (4س+5)(س − 3)

2) $4س^2 - 9 - 2(2س - 3).(س+1)$
3) $16س^2 - 9 + (4س+3).(س - 1)$
4) $9س^2 - 1 - 2(3س - 1)^2$
5) $4(4 - س^2) - (س - 2)^2$
6) $(5س - 10)(س - 3) - 3(س^2 - 4)$
7) $(2س^2 - 18).(س - 2) - (س^2 - 9).(2س - 1) + 3 - س$
8) $(س - 5)(3س - 8) + (س - 5)^2 + 2س^2 - 50$
9) $15 - 3س - 2(س - 5)^2 + س^2 - 25$

18 حلل كلا مما يأتي باستعمال نشر كل من $(أ+ب)^3$ ، $(أ - ب)^3$:

1) $8س^3 + 12س^2 + 6س + 1$
2) $س^3 - 9س^2ع + 9س ع^2 - 9ع^3$
3) $8س^3 + 6س^2ع + 6س ع^2 + ع^3$
4) $1 - 9س + 9س^2 - 9س^3$

19 حلل كلا مما يأتي باستعمال تحليل كل من $أ^3 + ب^3$ ، $أ^3 - ب^3$

1) $1 + س^3$
2) $1 - س^3$
3) $س^3 + \frac{1}{27}$
4) $8س^3 - 1$
5) $س - س^4$
6) $(س - 1)^3 - 64$

20

أوجد مجموعة تعريف كل من الكسور الآتية ثم ضع كلا منها على شكل مجموع كثير حدود و كسر ناطق درجة بسطه أصغر من درجة مقامه

1) $\frac{س^2 + س - 1}{س + 3}$
2) $\frac{3س^3 - 8س^2 + 7س - 5}{3س - 2}$
3) $\frac{3س^4 + 2س^3 - س + 1}{س^2 + 3}$
4) $\frac{س^5 + س^4 - 3س^3 + 3س - 2}{س^2 - 2س + 1}$

14 المعادلات من الدرجة الأولى

1.أنشطة تمهيدية

• نشاط 1 :

لتكن العبارتان :

تا (س) = (س - 3)^2 - 4 ؛ ها(س)= (س - 1) (س - 5)

- أ ثبت أنه من أجل كل قيمة للمتغير س فإن :

(س - 3)^2 - 4 = (س - 1) (س - 5)

نقول إن العبارتين تا (س) و ها (س) متطابقتان .

ونكتب : ∀ س ∋ ح : (س - 3)^2 - 4 = (س - 1) (س - 5)

• نشاط 2 :

ليكن كثير الحدود للمتغير الحقيقي س :

تا (س) = 3 س - 1 و ها (س) = س + 3

تحقق أنه :

- من أجل س = 2 يكون تا (س) = ها (س)
- و من أجل س = 0 يكون تا (س) ≠ ها (س)

هذا يعني أنّ المساواة تا (س)= ها(س) ليست محققة من أجل كل عدد حقيقي س فهي جملة مفتوحة معرفة في ح .

هذه الجملة تكون إما قضية صحيحة وإما قضية خاطئة حسب قيم المتغير الحقيقي س

الجملة المفتوحة تا (س) = ها (س) المعرفة في ح تسمى معادلة بالمجهول الحقيقي س .

تا (س) و ها (س) هما طرفا هذه المعادلة .

العدد الحقيقي 2 الذي يحقق هذه المساواة يسمى حلا لهذه المعادلة في المجموعة ح

العدد 0 ليس حلا لها .

• نشاط 3 :

عبّر عن كل من التعبيرين الآتيين بمعادلة

1) قطعة أرض مستطيلة مساحتها 21 (متر مربع) ، و عرضها ينقص عن طولها بأربعة أمتار .

2) بإضافة العدد الحقيقي نفسه إلى كل من حدي الكسر $\frac{3}{5}$ نحصل على العدد 2

2 .المعادلا ت

1) عموميات

• تعاريف

. حَل المعادلة تا (س) = ها (س) ، في مجموعة ل ، هو إيجاد كل قيم العدد س من ل التي تحقق هذه المعادلة .
مجموعة هذه القيم تسمى مجموعة حلول تلك المعادلة في المجموعة ل .

يمكن أن تكون ل إحدى المجموعات العددية المألوفة : ط ، ك ، ص ، ح

مثال :

عيّن ، من بين الأعداد : ـ 1 ، 0 ، $\frac{1}{2}$ ، 1 ، 2 ، 3 تلك التي هي حلول للمعادلة

2 س + 3 = س^2

المعادلات المتكافئة :

نقول عن معادلتين في مجموعة ل إنهما متكافئتان إذا و فقط إذا كان لهما نفس الحلول في ل .

مثال

لتكن المعادلتين في ح :
3 س = 12 ....(1)
2 س = 8 ....(2)
يوجد عدد حقيقي واحد ، هو 4 ، يحقق كلاّ من المعادلتين (1) و (2) أي
3× 4 = 12 و 2 × 4 = 8
إذن العدد 4 هو الحل الوحيد لكل من المعادلتين (1) وَ (2) فهما متكافئتان في ح
ونكتب : 3 س = 12 ⇔ 2 س = 8

2) تحويل المعادلات

. تحويل معادلة معرفة في ل هو إيجاد معادلة مكافئة لها في ل

قواعد تحويل المعادلات :

قاعدة 1

نحصل على معادلة مكافئة لمعادلة مفروضة بنقل حدٍ من طرف إلى آخر مع تغيير إشارته

تا (س) = ها (س) ⟺ تا (س) ـ ها (س) = 0

مثال :

المعادلتان : س^2 = س + 3 وَ س^2 ـ س = 3 متكافئتان

والمعادلتان : س^2 = س + 3 وَ س^2 ـ س ـ 3 = 0 متكافئتان

نستنتج أن : س^2 = س + 3 وَ س^2 ـ س = 3 وَ س^2 ـ س ـ 3 = 0 هي معادلات متكافئة .

قاعدة 2 :

> نحصل على معادلة مكافئة لمعادلة مفروضة بضرب طرفي هذه المعادلة في العدد الحقيقي غير المعدوم α

تا (س) = ها (س) ⟺ α تا (س) = α ها (س) ، $\alpha \neq 0$

مثال :

المعادلتان : 5 س^2 = 2 وَ س^2 = $\frac{2}{5}$ متكافئتان

والمعادلتان : 5 س^2 = 2 وَ ـ 10 س^2 = ـ 4 متكافئتان

نستنتج أن : 5 س^2 = 2 وَ س^2 = $\frac{2}{5}$ وَ ـ 10 س^2 = ـ 4

هي معادلات متكافئة .

3) درجة معادلة

لتكن المعادلة تا (س) = ها (س)

بتطبيق القاعدة 1 نجد :

تا (س) = ها (س) ⟺ تا (3) ـ ها (3) = 0

بوضع ك (س) = تا (س) ـ ها (س) نحصل على :

تا (س) = ها (س) ⟺ ك (س) = 0

فدرجة المعادلة تا (س) = ها (س) هي درجة كثير الحدود ك (س) المبسط .

مثال 1 :

للبحث عن درجة المعادلة : 4 س + 1 = 2 س ـ 6

نحولها إلى الشكل ك (س) = 0

بتطبيق القاعدة 1 يكون :

4 س + 1 = 2 س ـ 6 ⟺ (4 س + 1) ـ (2 س ـ 6) = 0

$\Leftrightarrow$ (4 س - 2 س) + (1 + 6) = 0
$\Leftrightarrow$ 2 س + 7 = 0 فدرجة المعادلة
4 س + 1 = 2 س - 6 هي درجة كثير الحدود المبسط 2 س + 7 أي الدرجة الأولى .

مثال 2 :

للبحث عن درجة المعادلة : - س^2 + س - 5 = - س نحولها إلى الشكل ك (س) = 0

لدينا : - س^2 + س - 5 = - س $\Leftrightarrow$ - س^2 + س - 5 + س = 0
$\Leftrightarrow$ - س^2 + 2 س - 5 = 0
فالمعادلة - س^2 + س - 5 = - س هي من الدرجة الثانية

3 . المعادلات من الدرجة الأولى بمجهول واحد

(م) : 8 س + 2 (س - 1) = 6 س - 5 معادلة معرفة في ح .
لنبحث عن معادلة مكافئة لها من الشكل ك (س) = 0
بتطبيق قواعد تحويل المعادلات يكون :
(م) $\Leftrightarrow$ 8 س + 2 س - 2 = 6 س - 5
$\Leftrightarrow$ 8 س + 2 س - 6 س = - 5 + 2
$\Leftrightarrow$ 4 س = - 3
$\Leftrightarrow$ 4 س + 3 = 0
فالمعادلة (م) تكافئ المعادلة 4 س + 3 = 0 التي هي من الدرجة الأولى في ح ومن الشكل أ س + ب = 0 حيث : أ وَ ب عددان حقيقيان .
ومنه :

كل معادلة في ح تحول إلى الشكل أ س + ب = 0 هي معادلة من الدرجة الأولى بالمجهول س .

أ و ب عددان حقيقيان معلومان وَ أ $\neq$ 0

. حل المعادلة أ س = ب في ح

نميز الحالات التالية :
1) أ $\neq$ 0

$$أ س = ب \Leftrightarrow \frac{1}{أ}(أ س) = \frac{1}{أ} ب$$

$$\Leftrightarrow س = \frac{ب}{أ}$$

مجموعة حلول المعادلة (1) هي : مج = $\{ \frac{ب}{أ} \}$

2) . أ = 0 ، و ب ≠ 0
المعادلة أ س = ب تكتب : 0 . س = ب
في هذه الحالة أ س = 0 و ب ≠ 0
إذن لا يوجد أيّ عدد حقيقي س يحقق المعادلة أ س = ب .
مجموعة الحلول هي المجموعة الخالية ϕ
أي : مج = ϕ

3) أ = 0 و ب = 0
في هذه الحالة : $\forall$ س ∈ ح : أ س = 0 و ب = 0
فكل عدد حقيقي س يحقق المعادلة أ س = ب .
مجموعة الحلول هي مجموعة الأعداد الحقيقية ح
أي : مج = ح

نلخص مناقشة حلول المعادلة أ س = ب في الجدول التالي :

الشروط	مجموعة الحلول
أ ≠ 0	يوجد حل وحيد هو : س = $\frac{ب}{أ}$ ، مج = $\{ \frac{ب}{أ} \}$
أ = 0 وَ ب ≠ 0	لايوجد أي حل ، مج = ϕ
أ = 0 وَ ب = 0	كل عدد حقيقي هو حل ، مج = ح

مثال 1 :
لتكن المعادلة :

$$\frac{2س + 1}{4} - \frac{س - 1}{6} = \frac{5}{4} - \frac{3س}{2} \quad .... (1)$$

لاحظ ان المقام المشترك هو 12 ، بضرب الطرفين في 12 يكون :

(1) ⟺ $12 \times \frac{2\text{س}+1}{4} - 12 \times \frac{\text{س}-1}{6} = 12 \times \frac{5}{4} - 12 \times \frac{3\text{س}}{2}$

(1) ⟺ 3 (2س + 1) - 2 (س - 1) = 3 × 5 - 6 × 3 س

(1) ⟺ 6س + 3 - 2س + 2 = 15 - 18 س

(1) ⟺ 4س + 5 = 15 - 18 س

(1) ⟺ 4س + 18 س = 15 - 5

(1) ⟺ 22 س = 10

(1) ⟺ س = $\frac{10}{22}$

(1) ⟺ س = $\frac{5}{11}$. حل المعادلة (1) هو $\frac{5}{11}$. أي مج = { $\frac{5}{11}$ } .

مثال 2 : لتكن المعادلة :

3 (2 س - 5) - (6 + س) = 5 س - 4 ....(1) لدينا :

(1) ⟺ 6 س - 15 - 6 - س = 5 س - 4

(1) ⟺ 5 س - 21 = 5 س - 4

(1) ⟺ 5 س -5 س = 21 - 4

(1) ⟺ 0 . س = 17

المساواة 0 . س = 17 لا يحققها أي عدد حقيقي س .

إذن مجموعة حلول المعادلة (1) هي المجموعة الخالية أي مج = ϕ .

مثال 3 : لتكن المعادلة :

4(س - 2) - 2 (3 س - 3) = (س - 3) - 3 س + 1 ......(1) لدينا :

(1) ⟺ 4 س - 8 - 6 س + 6 = س - 3 - 3 س + 1

(1) ⟺ - 2 س - 2 = - 2 س - 2

(1) ⟺ - 2 س + 2 س = -2 + 2

(1) ⟺ 0 . س = 0

المساواة 0 . س = 0 محققة من أجل كل عدد حقيقي س .

إذن مجموعة حلول المعادلة (1) هي المجموعة ح ،

أي مج = ح

4. جملة معادلتين خطيتين من الدرجة الأولى

أ) المعادلة الخطية من الدرجة الأولى

تا(س ، ع) ، ها (س ، ع) كثيرا حدود بالمتغيرين الحقيقين س ، ع حيث :

تا (س ، ع) = 5 س + 2 ع + 1

ها (س ، ع) = - س + ع . تحقق أنه :

- من أجل س = - 1 وَ ع = 5 يكون : تا (س ، ع) = ها (س ، ع)

- وَ من أجل س = 1 وَ ع = - 1 يكون تا (س ، ع) ≠ ها (س ، ع)

فالمساواة تا (س ، ع) = ها (س ، ع) ليست محققة من أجل كل ثنائية (س ، ع) من $ح^2$.

فهي جملة مفتوحة في $ح^2$ وَ تصبح إما قضية صحيحة وَ إما خاطئة حسب قيم الثنائية (س ، ع) من $ح^2$.

- الجملة المفتوحة تا (س ، ع) = ها (س ، ع) المعرفة في $ح^2$ أي :

5س + 2 ع + 1 = - س + ع....(1) (تسمى معادلة خطية من الدرجة الأولى بالمجهولين الحقيقين س و ع) . وبتطبيق قواعد التحويل نجد :

(1) ⟺ 5 س + 2 ع + 1 = - س + ع

(1) ⟺ 6 س + ع + 1 = 0

(1) ⟺ ع = - 6 س - 1 ....(2)

المعادلة (2) المكافئة للمعادلة (1) تبين أن كل ثنا ئية (س ، ع) من الشكل (س ، -6 س - 1) تحقق (1). نقول إن كل ثنائية من الشكل (س ، -6 س - 1) هي حل للمعادلة (1). هذا يعني أن المعادلة (1) تقبل عددا غير منته من الحلول من الشكل (س ، -6 س - 1) حيث س ∈ ح

فمثلا :

من أجل س = - 1 تكون الثنائية (-1 5) حلا للمعادلة (1) ، لأن تا (-1، 5) = ها (- 1 ، 5) بينما الثنائية (0 ، 1) ليست حلا للمعادلة (1) لأنها ليست من الشكل (س ، -6 س - 1)

- المعادلة (1) مكافئة للمعادلة 6 س + ع = - 1 التي هي من الشكل أس + ب ع = جـ حيث س وَ ع هما المجهولان

أ ، ب ، جـ أعداد حقيقية معلومة (أ ≠ 0 و ب ≠ 0)

بصفة عامة :

> كل معادلة من الشكل أ س + ب ع = جـ تسمى معادلة خطية من الدرجة الأولى بمجهولين حقيقين س ، ع ، حيث أ ، ب ، جـ أعداد حقيقية معلومة (أ ≠ 0 وَ ب ≠ 0) .

2) جملة معادلتين خطيتين من الدرجة الأولى بمجهولين .

لتكن المعادلتان الخطيتان :

أ س + ب ع = جـ ....(1)

أَ س + بَ ع = جَـ ......(2)

الوصل :

(أ س +ب ع = جـ) $\wedge$ (أَس+بَ ع = جـَ) يسمى جملة خطية بالمجهولين

س وَ ع ونكتب : (ج) ..... $\begin{cases} \text{أ س + ب ع = جـ} \\ \text{أَ س + بَ ع = جـَ} \end{cases}$

حل هذه المعادلة في ح^2 هو إيجاد كل الثنائيات (س ، ع) من ح^2 التي تحقق المعادلتين (1) و (2) في آن واحد .

مثلاً : الثنائية (4 ، + 3) من ح^2 تحقق كلا من المعادلتين

2 س - ع = 5 وَ س – ع = 1

فهي حل للجملة $\begin{cases} \text{2 س – ع = 5} \\ \text{س – ع = 1} \end{cases}$

- الثنائية (2 ، - 1) من ح^2 تحقق المعادلة (1) ولكنها لا تحقق المعادلة (2) فهي ليست حلا لتلك الجملة .
- الثنائية (1 ، 1) لا تحقق أ يا من المعادلتين (1) ، (2) ، فهي ليست حلا لتلك الجملة .

3) طرق حل جملة خطية

نقدم فيما يلي طرق حل جملة خطية من الدرجة الأولى .

لنحل الجملة الخطية التالية :

(ج)... $\begin{cases} \text{2 س – 3 ع = 12} & (1) \\ \text{3 س + ع = 7} & (2) \end{cases}$

. طريقة التعويض

تتمثل هذه الطريقة في تعيين أحد المجهولين بدلالة الآخرفي إحدى المعادلتين وَ تعويضة في المعادلة الأخرى .

لدينا ما يلي :

(2) $\Leftrightarrow$ ع = 7 – 3 س ....(3)

نعوض ع بقيمتة (7 – 3 س) في المعادلة (1) فنجد :

2 س – 3 (7 – 3 س) = 12 ⇔ 2 س – 21 + 9 س = 12 .

⇔ 11 س – 21 = 12

⇔ 11 س = 12 + 21

⇔ 11 س = 33

⇔ س = $\frac{33}{11}$

⇔ س = 3

بتعويض س بقيمتة 3 في معادلة (3) نجد :

ع = 7 – 3 (3) أي ع = - 2

فحل الجملة (ج) هو الثنائية (3 ، - 2)

ونكتب : مج = { (3 ، - 2) } .

. طريقة الجمع :

تتمثل هذه الطريقة في حذف أحد المجهولين بالضرب في عدد ملائم و الجمع :

لنحل الجملة السابقة (ج) :
{ 2 س – 3 ع = 12 (1)
{ 3 س + ع = 7 (2)

لحذف المجهول ع ، نضرب طرفي المعادلة (2) في العدد 3

(ج) ⇔
{ 2س – 3 ع = 12 (1َ)
{ 9س + 3 ع = 21 (2َ) .

بالجمع نجد : (2 س – 3 ع) + (9س + 3 ع) = 12 + 21

(2 س + 9 س) + (- 3 ع + 3 ع) = 33

11س = 33

ومنه : س = 3

ولحذف المجهول س نضرب طرفي المعادلة (1) في العدد (- 3) ونضرب طرفي المعادلة (2) في العدد 2 ؛ فنجد :

(ج) ⇔
{ –3 (2س – 3 ع) = (–3) × 12
{ 2 (3س + ع) = 2 × 7

⇔
{ –6س + 9 ع = –36
{ 6س + 2 ع = 14

وبالجمع نحصل على المعادلة :

$(-6س+9ع)+(6س+2ع) = -36+14$

أي $(-6س+6س)+(9ع+2ع) = -22$

$11ع = -22$

$ع = -2$.

بتعويض قيمة ع في إحدى المعادلتين نجد س = 3

فالثنائية (3، -2) هي حل للجملة (ج) ونكتب : مج = {(3، -2)}

ملاحظة :

بعد تعيين قيمة المجهول س يمكن البحث عن قيمة المجهول ع بتعويض س بقيمته في إحدى معادلتي الجملة .

• **طريقة المحدد** :

لتكن الجملة الخطية من الدرجة الأولى :

$$(ج) .. \begin{cases} أس + بع = جـ \\ أ'س + ب'ع = جـ' \end{cases}$$

تعتمد طريقة المحدد على العدد الحقيقي (أ ب' – أ'ب) الذي يمثل بالجدول :

$\begin{vmatrix} أ & ب \\ أ' & ب' \end{vmatrix}$ حيث أ و أ' هما معاملا س في الجملة (ج) و ب ، ب' هما معاملا ع

نكتب :

$$\begin{vmatrix} أ & ب \\ أ' & ب' \end{vmatrix} = أب' - أ'ب .$$

حل الجملة (ج) يتوقف على محددها

• إذا كان $\begin{vmatrix} أ & ب \\ أ' & ب' \end{vmatrix} \neq 0$ فإن الجملة تقبل حلاً وحيداً هو :

$$س = \frac{\begin{vmatrix} جـ & ب \\ جـ' & ب' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} أ & ب \\ أ' & ب' \end{vmatrix}} \quad و \quad ع = \frac{\begin{vmatrix} أ & جـ \\ أ' & جـ' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} أ & ب \\ أ' & ب' \end{vmatrix}}$$

المقام هو محدد الجملة
والبسط هو المحدد الناتج عن
تعويض أ ، أ' بالعددين جـ ، جـ'
على الترتيب .

المقام هو المحدد الجملة
والبسط هو المحدد الناتج عن
تعويض ب ، ب' بالعددين جـ ، جـ'
على الترتيب .

• إذا كان $\begin{vmatrix} أ & ب \\ أ' & ب' \end{vmatrix} = 0$ فإنه لايمكن تعيين س و ع بطريقة المحدد لأن القسمة على 0 غير ممكنة .

وفي هذه الحالة تكون مجموعة الحلول إما غير منتهية و إما خالية .

مثال :

لنحل الجملة (ج) : $\begin{cases} 2س - 3ع = 12 & (1) \\ 3س + ع = 7 & (2) \end{cases}$

لدينا محدد الجملة (ج) : $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2\times1-(-3)\times3 = 11$

ومنه : $س = \frac{\begin{vmatrix} 12 & -3 \\ 7 & 1 \end{vmatrix}}{11} = \frac{(1\times12)-(-3)\times7}{11} = 3$

و $ع = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 12 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}}{11} = \frac{2\times7-12\times3}{11} = -2$.

فحل الجملة (ج) هو (3، -2) أي مج = { (3، -2) } .

تلاحظ أن مجموعة حلول الجملة (ج) هي نفسها في جميع الطرق .

مثال 2 :

لتكن الجملة (ج) : $\begin{cases} س - ع = 2 \cdots (1) \\ 5س - 5ع = 10 \cdots (2) \end{cases}$.

لدينا :

محدد الجملة هو : $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -5 \end{vmatrix} = 1\times5-(-1)\times5 = 0$.

إذن مجموعة الحلول هي إما غير منتهية وَ إما المجموعة الخالية ϕ
وبالتالي لايمكن إستعمال طريقة المحدد

لاحظ أن : (2) $\Leftrightarrow$ 5(س-ع) = 10
(2) $\Leftrightarrow$ س-ع= 2
(2) $\Leftrightarrow$ (1) .

بما أن (1) $\Leftrightarrow$ (2) فإن الجملة (ج) تؤول إلى المعادلة :
س-ع = 2
ومنه ع = س-2

فمجموعة الحلول هي جميع الثنائيات من الشكل (س ، س-2) حيث س$\in$ح
وهي مجموعة غير منتهية أي:
مج = { (س، ع)$\in$ ح^2 / ع = س-2 } .

مثال 3 : لتكن الجملة :

(ج) : $\begin{cases} س + 2ع = 1 \cdots (1) \\ 2س + 4ع = -2 \cdots (2) \end{cases}$.

لدينا : محدد الجملة هو : $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 4 = 0$

فمجموعة الحلول هي إما غير منتهية وإما المجموعة الخالية وبالتالي لايمكن إستعمال المحدد .

لاحظ أن : (2) $\Leftrightarrow$ 2 (س+2 ع)= -2
$\Leftrightarrow$ س+2 ع = -1

فلدينا :
س+2 ع =1 وَ س+2 ع = -1 وهذا تناقض .

إذن لايوجد أي ثنائية (س ، ع) تحقق الجملة (ج) . وبالتالي مجموعة الحلول هي المجموعة الخالية ϕ .

5. تطبيقات

أ) حل معادلة من الشكل : تا(س) × ها(س) = 0

حيث كل من تا(س) وَ ها(س) هو كثير حدود من الدرجة الأولى .

نذكر بخاصية الجداء المعدوم : **أ × ب = 0 ⇔ أ = 0 أو ب = 0**

مثال 1 :

لنحل في ح المعادلة : -3 س(5 س-3) = 0

حسب خاصية الجداء المعدوم لدينا :

-3 س(5 س-3) = 0 ⇔ -3 س = 0 أو 5 س-3 = 0 .

⇔ س = 0 أو س = $\frac{3}{5}$

فمجموعة حلول المعادلة -3 س(5 س-3) = 0 هي :

مج = { 0 ، $\frac{3}{5}$ } .

مثال 2 :

لنحل المعادلة : (س-3)(2 س-1) = 4 س^2 -2 س .....(1)

لدينا :

(1) ⇔ (س-3)(2س-1)-(4 س^2-2 س) = 0 ، (نقل إلى **الطرف الأول**) .

(1) ⇔ (س-3)(2س-1)- 2 س(2 س-1) = 0

(1) ⇔ (2س-1)[(س-3)-2 س] = 0 (تحليل الطرف الأول حيث **2س-1** هو العامل المشترك)

(1) ⇔ (2س-1) (س-3-2س) =0

(1) ⇔ (2 س-1)(-3-س)= 0

(1) ⇔ 2س-1 =0 أو -3 – س = 0 (خاصية الجداء المعدوم)

(1) ⇔ س = $\frac{1}{2}$ أو س = -3

إذن مج = { -3 ، $\frac{1}{2}$} .

. طريقة حل معادلة من الدرجة الأولى

لحل معادلة من الشكل تا (س) = ها (س) نتبع ما يلي .

1) ننقل كل حدود الطرف الثاني إلى الطرف الأول .

تا (س) = ها (س) ⟺ تا (س) – ها (س) = 0

2) نحلل تا (س) – ها (س)

3) نطبق خاصية الجداء المعدوم :

أ ب = 0 ⟺ أ = 0 أو ب = 0

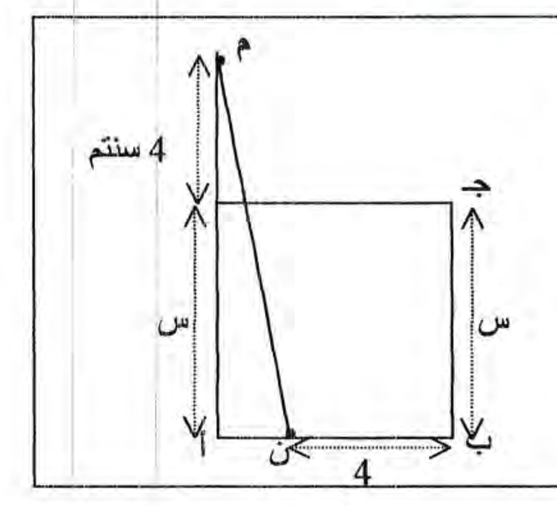
ثم نحل هاتين المعادلتين البسيطتين

4) نكتب الحلول بين حاضنتين

6 .تمرين محلول

لنحل المسألة التالية

أ ب جـ د مربع .
نضيف 4 سنتم إلى طول الضلع أ د
ونطرح 4 سنتم من طول الضلع أ ب
فنحصل على المثلث أ م ن (الشكل)
الذي مساحته هي ربع مساحة المربع
أ ب جـ د.
عين طول ضلع هذا المربع .



منهجية حل المسألة :

حل مسألة يتطلب أربع مراحل هي :

1. إختيار المجهول أو المجاهيل .
2. ترجمة المسألة إلى معادلة
3. حل المعادلة.
4. مناقشة حلول المعادلة وإعطاء الجواب .

الحل :

1. إختيار المجهول :

نسمي س طول ضلع المربع أ ب جـ د بالسنتم . بما أن س يمثل طولا فإنه عدد حقيقي موجب وأكبر من 4 (لكي يمكن أن نطرح منه 4) .

إذن س ∈] 4 ، +∞ [.

2. ترجمة المسألة إلى معادلة :

• مساحة المثلث أ م ن هي : $\frac{أم \times أن}{2} = \frac{(س+4)(س-4)}{2}$

• مساحة المربع أ ب جـ د هي : أ ب×أ ب= $س^2$.

• نبحث عن س بحيث تكون مساحة المثلث أ م ن هي ربع مساحة المربع أ ب جـ د .

ومنه المعادلة : $\frac{(س+4)(س-4)}{2} = \frac{1}{4}س^2$.

3. حل المعادلة :

لدينا $\frac{(س+4)(س-4)}{2} = \frac{1}{4}س^2$ ...(1)

(1) ⇔ $\frac{س^2-16}{2} = \frac{1}{4}س^2$

(1) ⇔ $4\,\frac{س^2-16}{2} = 4(\frac{1}{4}س^2)$

(1) ⇔ $2\,(س^2-16) = س^2$.

(1) ⇔ $2س^2-32-س^2 = 0$

(1) ⇔ $س^2-32 = 0$

(1) ⇔ $س^2-(\sqrt{32})^2 = 0$.

(1) ⇔ $(س+\sqrt{32})(س-\sqrt{32}) = 0$

(1) ⇔ $س+\sqrt{32} = 0$ أو $س-\sqrt{32} = 0$

(1) ⇔ $س = \sqrt{32}$ أو $س = -\sqrt{32}$

(1) ⇔ $س = 4\sqrt{2}$ أو $س = -4\sqrt{2}$

4. المناقشة والجواب .

بما أن س ∋] 4 ، +∞ [فإن الحل الملائم للمسألة هو $4\sqrt{2}$.

إذن طول ضلع المربع أ ب جـ د هو $4\sqrt{2}$ سنتم .

تمـــــــاريـــــــن

• حل معادلة :

1. تحقق أن -1 هو حل للمعادلة :
$2س^2 + 3س + 1 = 0$.

2. تحقق أن $-\frac{1}{2}$ هو حل للمعادلة :
$8س^2 - 2س - 3 = 0$.

3. تحقق أن $-\frac{3}{4}$ هو حل للمعادلة :
$4س^2 - 5س - 6 = 0$.

4. هل العدد $-\frac{5}{3}$ هو حل للمعادلة :
$3س^2 - 5س = 9س^2 + 2س$ ؟

• المعادلات من الدرجة الأولى :

5 **حل ، في ح ، كلاً من المعادلات التالية :**

1) $س - 4 = 0$ ؛ $2س - 5 = 0$ ؛ $1 - س = 0$.

2) $3س = 0$ ؛ $-2 - س = 0$ ؛ $-6س + 1 = 0$

3) $\frac{2}{3}س + 1 = 0$ ؛ $\frac{س}{4} - \frac{1}{4} = 0$ ؛ $-\frac{2}{5}س = 0$

4) $\frac{س}{3} = \frac{1}{3}$ ؛ $\frac{3س}{4} - \frac{5}{2} = 0$ ؛ $-\frac{2}{5} + \frac{4}{5}س = 0$

6 **حل ، في ح ، كلاً من المعادلات التالية :**

1) $9 - 2(س - 14) = 8س - (2س - 5) - (12 - 2س)$.

2) $8 - [8س - 5(2س + 3) + (4س - 5)] = 2س - [7 - 2س - (9 + 10س)]$

3) $12 - [7س - (9س - 8)] = 7س - [7س - (4س - 7)]$

4) $10(س + 2) - 19 = 8(1 - س) - 3(3 - 2س)$.

5) $4(5س - 1)^2 - 2(7س + 1)(1 - 2س) = 2(8س - 3)^2 + 14$.

7 حل ، في ح ؛ كلاً من المعادلات التالية :

1) $\frac{3(1-س)}{4} = 6 + \frac{3س}{5}$.

2) $\frac{س-7}{12} - \frac{س-5}{9} + 1 = 0$.

3) $\frac{1}{4} + \frac{3-2س}{12} = \frac{5-2س}{9}$.

4) $\frac{3س-5}{6} + \frac{6س-1}{15} = \frac{3س}{5}$.

5) $\frac{3(س+5)}{7} + 4 = \frac{1-3س}{28}$.

6) $\frac{9+س}{6} + \frac{1+س}{14} = \frac{11}{21}$.

7) $س + \frac{3}{2} + \frac{10س+1}{12} = \frac{7(س-1)}{4}$.

8) $\frac{3 - \frac{2س+1}{3}}{4} - \frac{2س+1}{15} = 6$

9) $\frac{3}{5}\left(\frac{\frac{س}{3}-2}{4} - 4\right) - \left(س - 4\right) = \frac{2}{15}\left(7 - 3س\right) + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2} - \frac{7س}{3}\right)$

8 حل ، في ح ؛ كلاً من المعادلات التالية :

1) $(3س-1)(8س-3)-(1-3س)(س-1)-2(3س-1)(س+1) = 0$

2) س (2+س)-(2+س)^2 = 4- س^2 .

3) (2 س+5)(س-1) = س^2-1 .

4) (س^2- س+3)^2-(س^2+ س – 3)^2 = 0 .

5) 4(س-3) = (س-3)^2 .

6) (س^2-9)($\frac{3\text{س}}{2}$+2)- 6 (س-3) = 0 .

7) 3 س^2 – س= 0 .

8) 4 س^2- 3 س= 0 .

9) 5 س^2+ س = 0 .

10) $\frac{\text{س}^2}{16}$ – 9س = 0 .

11) $\frac{3}{5}$س^2 – س = 0 .

12) 9 س^2 - $\frac{\text{س}}{4}$ = 0 .

13) س^2- 4 = 0 .

14) 2 س(س+1)+4 = (س+1)(س+4) .

15) (1- س)^3 = (1-س)(2 س+1)(س +1) .

- حل معادلة بمجهولين حقيقيين :

9 تحقق أن (2 ، -3) حل للمعادلة : 2 س- 5 ع = 9

10 تحقق أن (-5 ، -2) حل للمعادلة : 2 س^2 –3 ع^3 = 74 .

11 هل $(-\frac{5}{2}، \frac{3}{2})$ حل للمعادلة : 4 س^2 – 9 ع^2 = س^2 – 4 ع + 3 .

12 تحقق أن (- 3 ، 2) حل مشترك للمعادلتين :

2 س + 5 ع = 4 و -3 س + 2 ع = 13 .

• الجمل الخطية :

13 حل ، في ح^2 ، بطريقتي الجمع والتعويض الجملة التالية :

$$\begin{cases} 4\text{س} - \text{ع} = 5 \\ 10\text{س} - 2\text{ع} = 11 \end{cases}$$

14 حل ، في ح^2 ، بطريقتي الجمع والمحدد الجملة التالية :

$$\begin{cases} \text{س} - 6\text{ع} = 17 \\ 3\text{س} - 2\text{ع} = 11 \end{cases}$$

15 حل ، في ح^2 ، بطريقتي التعويض والمحدد الجملة التالية :

$$\begin{cases} 3\text{س} - \text{ع} = 4 \\ 5\text{س} - 2\text{ع} = 5 \end{cases}$$

16 حل ، في ح^2، كلاً من الجمل التالية :

1) $\begin{cases} 7\text{س} + 3\text{ع} = 1 \\ \text{س} - 3\text{ع} = 7 \end{cases}$

2) $\begin{cases} \frac{11}{2}\text{س} - \frac{1}{3}\text{ع} = 6 \\ \frac{1}{2}\text{س} - \frac{2}{3}\text{ع} = 11 \end{cases}$

3) $\begin{cases} \frac{4}{5}\text{س} + \text{ع} = 28 \\ \frac{9}{10}\text{س} + \frac{2}{3}\text{ع} = 20 \end{cases}$

4) $\begin{cases} 5\text{س} - \frac{4\text{ع}}{3} - \frac{10 - 6\text{ع}}{7} = 0 \\ 25\text{س} + 2\text{ع} = 30 \end{cases}$

5) $\begin{cases} \frac{3\text{س} + \text{ع}}{5} = \frac{6\text{س} - \text{ع}}{7} \\ \frac{3\text{س} - 2\text{ع} - 1}{3} = \frac{6\text{س} - \text{ع}}{7} \end{cases}$

• المعادلات من الشكل تا(س) × ها(س) = 0 .

17 ليكن كثير الحدود ك(س) = س^2 +4 س- 5 .

1) تحقق أن ك(1) = 0 .

2) أتمم المساواة التالية : س^2 +4 س- 5 = (س-1)(.......)

3) حل ، في ح ، المعادلة ك(س) = 0 .

18 ليكن كثير الحدود ك(س) = - س^2 + 3 س +4 .

1) تحقق أن ك(-1) = 0

2) أتمم المساواة التالية : - س^2 +3 س +4 = (س+ 1)(.......)

3) حل ، في ح ، المعادلة ك(س) = 0 .

19 لتكن كثيرات الحدود

تا$_1$(س) = س^2 – 9 س + 8 ؛ تا$_2$(س) = - س^2 + س + 2

تا$_3$(س) = 3س^2 – 5 س + 2 ؛ تا$_4$(س) = - 3 س^2 + 4 س + 7

تا$_5$(س) = 5س^2 – 11 س + 2 ؛ تا$_6$(س) = س^2 – س – 6

1) تحقق أنّ أحد الأعداد – 1 ، 1 ، 2 ، - 2 هو جذر لأحد كثيرات الحدود هذه ؛ ثم استنتج تحليلا لكل من كثيرات الحدود المفروضة

2) حل ، في ح ، كلا من المعادلات :

تا$_1$(س) = 0 ؛ تا$_2$(س) = 0 ؛ تا$_3$(س) = 0 ؛ تا$_4$(س) = 0 ؛ تا$_5$(س) = 0

تا$_6$(س) = 0 .

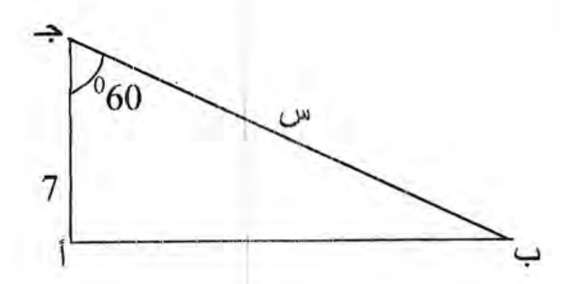
. حل مسألة بمعادلة

20 إذا ضربنا عددا في $\frac{1}{2}$ فإنه ينقص بمقدار 3 . ما هو هذا العدد ؟

21 أ ب جـ مثلث قائم في أ (الشكل)

(وحدة الطول هي السنتيمتر)

عيّن س بحيث يكون أ جـ = 7



15 المتراجحات من الدرجة الأولى

1 . أنشطة تمهيدية

. نشاط 1 :

. أ ≤ ب معناه أ – ب ≤ 0

قارن بين كل من : - 7 و 5 ؛ $-\frac{1}{2}$ و $-\frac{1}{3}$ ؛ $-\frac{1}{4}$ و $-\frac{1}{5}$

. نشاط 2 :

أتمم ما يلي :

. أ > 2 ⟺ أ + 3 > ....

. ب < 3 ⟺ 4ب 12

. ب < 5 ⟺ $-\frac{1}{2}$ب ...... $-\frac{5}{2}$

. نشاط 3 :

ليكن كثيرا الحدود للمتغير الحقيقي س :

تا(س) = 2س – 3 و ها (س) = س – 2

. تحقق أنّ :

. تا(س) – ها(س) = س – 1

. من أجل س ≤ 1 يكون تا(س) ≤ ها(س)

. من أجل س ≥ 1 يكون تا(س) ≥ ها(س)

هذا يعني أنّ المتباينة تا(س) ≥ ها(س) لا تكون محققة في ح إلاّ إذا كان س ≥ 1 فهي جملة مفتوحة معرفة في ح .

و تصبح قضية صحيحة إذا كان س ∈] - ∞ ، 1] وقضية خاطئة إذا كان س ∈] 1 ، + ∞ [

. الجملة المفتوحة تا (س) ≤ ها(س) تسمى متراجحة بالمجهول الحقيقي س .

. تا(س) و ها(س) هما طرفا هذه المتراجحة

. مجموعة قيم المتغير س التي تحقق المتراجحة تسمى مجموعة حلول هذه المتراجحة .

مجموعة حلول المتراجحة تا(س) ≤ ها(س) أي 2 س – 3 ≤ س – 2 هي .

المجال] 1 ، + ∞ [

نكتب مج =] 1 ، + ∞ [

. يمكن أن تعطى متراجحة بأحد الأشكال :

تا(س) > ها(س) ؛ تا(س) < ها(س) ؛ تا(س) ≥ ها(س) ؛ تا(س) ≤ ها(س)

2. المتراجحات في ح

1) عموميات

• **تعاريف**

. حل المتراجحة تا(س) ≤ ها(س) في مجموعة ل هو إيجاد قيم العدد س من ل التي تحقق هذه المتراجحة .

. مجموعة هذه القيم تسمى مجموعة حلول المتراجحة تا(س) ≤ ها(س) في المجموعة ل .

يمكن أن تكون ل إحدى المجموعات العددية المألوفة :

ط ، ص ، ك ، ح .

حلّ المتراجحة 2 س – 3 ≤ س – 2 ذات المجهول الحقيقي س هو إيجاد مجموعة قيّم س التي تحقق هذه المتراجحة .

. المتراجحات المتكافئة

نقول عن متراجحتين إنهما متكافئتان في مجموعة ل إذاكان لهما مجموعة الحلول نفسها في ل .

مثال :

لتكن المتراجحتان في ح :

3 س ≤ 12 .....(1)

2 س ≤ 8 ....(2)

كل عدد حقيقي أكبر من 4 أو يساوي 4 يحقق المتراجحتين (1) و (2) معا ،
إذن للمتراجحتان (1) وَ (2) مجموعة الحلول نفسها] 4 ، + ∞ [فهما متكافئتان

نكتب 3 س ≤ 12 ⟺ 2 س ≤ 8

2) تحويل المتراجحات

. تحويل متراجحة معرفة في ل هو إيجاد متراجحة مكافئة لها في ل

. قواعد تحويل المتراجحات :

مثلما رأينا في المعادلات ، لدينا القواعد العملية التالية :

قاعدة 1 :

نحصل على متراجحة مكافئة لمتراجحة مفروضة بنقل حد من طرف إلى آخر مع تغيير إشارته

نكتب تا(س) ≤ ها(س) ⇔ تا(س) – ها(س) ≤ 0

مثال :

المتراجحتان : $س^2 >$ س – 1 وَ $س^2 –$ س + 1 > 0 متكافئتان

وَ نكتب : $س^2 >$ س – 1 ⇔ $س^2 –$ س + 1 > 0

قاعدة 2 :

بضرب طرفي المتراجحة تا(س) ≤ ها(س) في عدد حقيقي موجب، تماما α نحصل على المتراجحة المكافئة لها : α تا(س) ≤ α ها(س)

ونكتب : [تا(س) ≤ ها(س)] ⇔ α تا(س) ≤ α ها(س)

و $\alpha > 0$

مثال : المتراجحتان : $س^2$ + 1 > س وَ 3 ($س^2$ + 1) > 3 س متكافئتان

و نكتب : $س^2$ + 1 > س ⇔3 ($س^2$ + 1) > 3 س

قاعدة 3

بضرب طرفي المتراجحة تا(س) ≤ ها(س) في عدد سالب تماما α نحصل على المتراجحة المكافئة لها : α تا(س) ≥ α ها(س)

ونكتب : [تا(س) ≤ ها(س)وَ $\alpha < 0$] ⇔ [α تا(س) ≥ α ها(س)]

مثال :

المتراجحتان $س^2$ + 1 ≤ س وَ - 5 ($س^2$ + 1) ≥ - 5 س متكافئتان

3) درجة متراجحة

لتكن المتراجحة تا(س) ≤ ها(س)

لدينا :

تا(س) ≤ ها(س) ⇔ تا(س) – ها(س) ≤ 0 (تطبيق القاعدة 1)

⇔ ك (س) ≤ 0 (فرق كثيري حدود هو كثير حدود)

المتراجحتان تا(س) ≤ ها(س) و ك(س) ≤ 0 متكافئتان

فدرجة المتراجحة تا(س) ≤ ها(س) هي درجة كثير الحدود ك(س) المبسط .

مثال 1 :

المتراجحتان 3 س – 1 ≤ 2 س – 5 وَ س + 4 ≤ 0 متكافئتان

. كثير الحدود المبسط س + 4 هو من الدرجة الأولى

وبالتالي فالمتراجحة 3 س – 1 ≤ 2 س – 5 هي من الدرجة الأولى .

مثال 2 :

المتراجحتان 5 س^2 < 2 س^2 + س – 1 وَ 3 س^2 – س + 1 < 0 متكافئتان .

كثير الحدود المبسط 3 س^2 – س + 1 هو من الدرجة الثانية ، فالمتراجحة

2 س^2 < 2 س^2 + س – 1 هي من الدرجة الثانية .

2 . المتراجحات من الدرجة الأولى بمجهول واحد

لتكن المتراجحة في ح : 5 (س – 2) > 3 (س + 1) .....(1)

ولنبحث عن متراجحة مكافئة لها من الشكل ك(س) > 0

لدينا :

(1) ⟺ 5 س – 10 > 3 س + 3

(1) ⟺ 5 س – 10 – (3 س + 3) > 0

(1) ⟺ 2 س – 13 > 0

المتراجحة 2 س – 13 > 0 المكافئة للمتراجحة (1) هي من الدرجة الأولى و من الشكل أ س + ب > 0 حيث أ و ب عددان حقيقيان .

ومنه :

. كل متراجحة في ح تحول إلى أحد الأشكال :

أ س + ب ≥ 0 أو أ س+ ب ≤ 0 أو أ س + ب < 0 أو أ س + ب > 0 هي متراجحة من الدرجة الأولى بالمجهول س . أ وَ ب عددان حقيقيان معلومان ، أ≠ 0

. **حل المتراجحة أ س ≥ ب في ح** . نميز الحالات التالية :

1) أ > 0 : أ س ≥ ب ⟺ $\frac{1}{أ}$ (أ س) ≥ $\frac{1}{أ}$ ب (الضرب في العدد الموجب $\frac{1}{أ}$)

⟺ س ≥ $\frac{ب}{أ}$

مجموعة حلول المتراجحة أ س ≥ ب هي مج =] - ∞ ، $\frac{ب}{أ}$ [

2) أ < 0 : أ س ≥ ب ⟺ $\frac{1}{أ}$ (أ س) ≤ $\frac{1}{أ}$ ب (الضرب في العددالسالب $\frac{1}{أ}$)

⟺ س ≤ $\frac{ب}{أ}$

مجموعة حلول المتراجحة أ س ≥ ب هي مج = [$\frac{ب}{أ}$ ، + ∞ [

3) أ = 0 : أ س ≥ ب ⟺ 0 . س ≥ ب

ومنه :

- إذا كان ب ≤ 0 فإن مج = ح

- إذا كان ب > 0 فإن مج = ϕ

نلخص هذه النتائج في الجدول التالي :

الشروط	حلول المتراجحة أ س ≥ ب
أ< 0	س ≤ $\frac{ب}{أ}$ ، أي مج =] - ∞ ، $\frac{ب}{أ}$]
أ > 0	س ≥ $\frac{ب}{أ}$ ، أي مج = [$\frac{ب}{أ}$ ، + ∞ [
أ = 0 وَ ب ≤ 0	مج = ح
أ = 0 وَ ب> 0	مج = ϕ

مثال 1 :

. حلّ ، في ح ، المتراجحة :

$$\frac{س - 3}{4} - \frac{3س - 5}{6} > \frac{5}{12} - \frac{7 - س}{3} \quad ......(1)$$

بضرب طرفي المتراجحة (1) في المقام المشترك 12 نحصل على :

(1) ⟺ 3 (س – 3) – 2 (3 س – 5) > 5 – 4 (7 – س)

(1) ⟺ 3 س – 9 – 6 س + 10 > 5 – 28 + 4 س

(1) ⟺ - 3 س + 1 > - 23 + 4 س

(1) ⟺ - 3 س – 4 س > - 23 – 1

(1) ⟺ - 7 س > - 24

(1) ⟺ س < $\frac{24}{7}$ ومنه مجموعة حلول (1) هي : مج =] $\frac{24}{7}$ ، +∞ [

مثال 2 :

. حلّ، في ح ، المتراجحة :

$$\frac{2\text{س}}{3} - \frac{3\text{س}}{2} + 3\text{س} < 15 \quad ..... \quad (1)$$

بضرب طرفي المتراجحة (1) في المقام المشترك 6 نحصل على :

$(1) \Leftrightarrow 2(2\text{س}) - 3(3\text{س}) + 6(3\text{س}) < 6 \times 1$

$(1) \Leftrightarrow 4\text{س} - 9\text{س} + 18\text{س} < 90$

$(1) \Leftrightarrow 13\text{س} < 90$

$(1) \Leftrightarrow \text{س} < \frac{90}{13}$

ومنه مجموعة حلول (1) هي : $\text{مج} =]-\infty \text{ ، } \frac{90}{13}[$

3 . جملة متراجحتين من الدرجة الأولى

لتكن المتراجحتان من الدرجة الأولى

$\text{أس} + \text{ب} \leq 0$ ....(1) التي مجموعة حلولها مج_1

$\text{أ}'\text{س} + \text{ب}' \leq 0$ ....(2) التي مجموعة حلولها مج_2

. الوصل $(\text{أس} + \text{ب} \leq 0) \wedge (\text{أ}'\text{س} + \text{ب}' \leq 0)$ يسمى جملة المتراجحتين (1) و (2)

ونكتب : (ج) $\begin{cases} \text{أس} + \text{ب} \leq 0 \cdots (1) \\ \text{أ}'\text{س} + \text{ب}' \leq 0 \cdots (2) \end{cases}$

. حل في ح هذه الجملة هو إيجاد كل قيّم س التي هي حلول للمتراجحتين (1) و (2) في آن واحد . فمجموعة حلول الجملة (ج) هي : $\text{مج} = \text{مج}_1 \cap \text{مج}_2$

مثال :

حلّ ، في ح ، الجملة (ج) :(ج) $\begin{cases} 2\text{س} + \frac{3}{2} < 3 - \text{س} & (1) \\ \frac{3\text{س} - 1}{2} > \text{س} - 1 & (2) \end{cases}$

. حلّ المتراجحة (1) :

بضرب طرفي (1) في العدد 2 نحصل على :

(1) ⇔ 4س + 3 > 6 − 2س

⇔ 4س + 2 س > 6 − 3

⇔ 6س > 3

⇔ س > $\frac{1}{2}$

ومنه : مج$_1$ = [- ∞ ، $\frac{1}{2}$]

تمثيل مج$_1$:

∞ -   مج$_1$ $\frac{1}{2}$ ∞ +

. حلّ المتراجحة (2)

بضرب طرفي (2) في العدد 2 نحصل على :

(2) ⇔ 2 $\left(\frac{3س - 1}{2}\right)$ < 2(س − 1)

⇔ 3س − 1 < 2س − 2

⇔ 3س − 2س < - 2 + 1

⇔ س < - 1

ومنه : مج$_2$ = [− 1 ، + ∞]

تمثيل مج$_2$:

∞ -   1-   مج$_2$ ∞ +

فحلّ الجملة (ج) هو مج = مج$_1$ ∩ مج$_2$

= [- ∞ ، $\frac{1}{2}$] ∩ [− 1 ، + ∞]

مج = [− 1 ، $\frac{1}{2}$]

تمثيل مج :

∞ -   1-   مج $\frac{1}{2}$ ∞ +

4. تطبيـــقات

1) إشارة كثير الحدود تا (س) = أ س + ب حيث أ ≠ 0

. أ س + ب هو كثير حدود من الدرجة الأولى معرف في ح أي :

س ∋] - ∞ ، + ∞ [

لدينا : تا(س) = أ س + ب

= أ (س + $\frac{ب}{أ}$) ومنه :

. إذا كان س = - $\frac{ب}{أ}$ فإن تا(س) = 0 و - $\frac{ب}{أ}$ هو حل المعادلة تا(س) = 0

. إذا كان س > - $\frac{ب}{أ}$ فإن س + $\frac{ب}{أ}$ > 0 .

إذن إشارة الجداء أ (س + $\frac{ب}{أ}$) هي إشارة أ ، فإشارة تا(س) هي إشارة أ .

. إذا كان س < - $\frac{ب}{أ}$ فإن س + $\frac{ب}{أ}$ < 0 .

إذن إشارة الجداء أ(س+ $\frac{ب}{أ}$) هي عكس إشارة أ ، فإشارة تا(س) هي إشارة(- أ)

نلخص هذه النتائج في الجدول التالي :

س	- ∞	- $\frac{ب}{أ}$	+ ∞
إشارة أ س+ب	إشارة (- أ)	0	إشارة أ

ومنه :

إذا كان تا(س) = أ س +ب حيث أ ≠ 0 فإن :

. تا(س) = 0 من أجل س = - $\frac{ب}{أ}$

. إشارة تا(س) هي إشارة أ من أجل س > - $\frac{ب}{أ}$

. إشارة تا(س) هي إشارة (- أ) من أجل س < - $\frac{ب}{أ}$

مثال 1 :

لندرس إشارة : تا(س) = 2 س – 3

لدينا : تا(س) =0 ⟺ 2 س – 3 = 0

⟺ س = $\frac{3}{2}$ ،

والجدول التالي يبين إشارة 2 س – 3

س	- ∞	$\frac{3}{2}$	+ ∞
إشارة 2 س-3	—	0	+

مثال 2 :

لندرس إشارة تا(س) = 4 – 5 س

لدينا :

تا(س) = 0 ⟺ 4 – 5 س = 0

⟺ س = $\frac{4}{5}$

الجدول التالي يبين إشارة تا(س) :

س	- ∞	$\frac{4}{5}$	+ ∞
إشارة 4-5 س	+	0	—

2) إشارة جداء عوامل من الدرجة الأولى .

قاعدة :

لدراسة إشارة كثير حدود تا(س) نحلل تا(س) ثم نطبق قاعدة إشارة جداء .

مثال 1 :

لندرس إشارة تا(س) حيث :

تا(س) = - 3 س (س + 1) (6 – 2 س)

. لنبحث عن حلول المعادلة تا(س) = 0

تا(س) = 0 ⟸ - 3 س (س + 1) (6 – 2 س) = 0

تا(س) = 0 ⟸ - 3 س = 0 أو س + 1 = 0 أو 6 – 2 س = 0

تا(س) = 0 ⟸ س = 0 أو س = - 1 أو س = 3

جدول إشارة تا(س) :

س	- ∞		1-		0		3		+ ∞
إشارة –3 س		+		+	0	—		—	
إشارة س+1		—	0	+		+		+	
إشارة 6-2 س		+		+		+	0	—	
إشارة تا(س)= -3س(س+1)(6-2س)		—	0	+	0	—	0	+	

الجدول يبين أن .

. تا(س) < 0 من أجل : س ∋] - ∞ ، - 1 [∪] 0 ، 3 [

. تا(س) > 0 من أجل : س ∋] – 1 ، 0 [∪] 3 ، + ∞ [

. تا(س) = 0 من أجل : س = - 1 أو س = 0 أو س = 3

مثال 2 :

لندرس إشارة تا(س) حيث :

تا(س) = (8 – س) (3 – س) – (6 س + 1) (2 س – 16)

. نحلل تا(س) :

تا(س) = (8 – س) (3 – س) –(6 س + 1) (- 2) (8 – س)

= (8 – س) (3 – س) + 2 (6 س + 1) (8 – س)

= (8 – س) [(3 – س) + 2 (6 س + 1)]

= (8 – س) (11 س + 5)

تا(س) = (8 – س) . (11 س + 5)

. نبحث عن حلول المعادلة تا(س) = 0

تا(س) = 0 ⟸⟹ [8 – س = 0 أو 11 س + 5 = 0]

تا(س) = 0 ⟸⟹ [س = 8 أو س = - $\frac{5}{11}$]

. جدول إشارة تا(س) :

س	- ∞	$-\frac{5}{11}$		8		+ ∞
إشارة 8-س	+		+	0	—	
إشارة 11 س-5	—	0	+		+	
إشارة تا(س)	—	0	+	0	—	

الجدول يبين أن :

. تا(س) < 0 من أجل س ∈] - ∞ ، - $\frac{5}{11}$ [∪] 8 ، + ∞ [

. تا(س) > 0 من أجل س ∈] - $\frac{5}{11}$ ، 8 [

. تا(س) = 0 من أجل س = - $\frac{5}{11}$ أو س = 8

5 . تمرين محلول

ليكن كثيرا الحدود : تا(س) = - 5 س^2 + 26 س –5

ها(س) = 25 س^2 – 1

1. تحقق أن تا(5) = 0 ثم إستنتج تحليلا لكثير الحدود تا(س) .
2. عين قيم س التي من أجلها يكون تا(س) ≤ ها(س)

الحل :

1) تحليل تا(س) :

لدينا : تا(س) = - 5 س^2 + 26 س –5

تا(5) = (- 5) × 5 ^{2} + 26 × 5 – 5

= - 130 + 130 = 0

بما أن تا(س) ينعدم من أجل س = 5 فإن تا(س) يقبل القسمة على س – 5

ومنه : تا(س) = (س – 5) (أ س + ب)

= أ س^2 + (ب – 5 أ) س – 5 ب

وبمطابقة عبارتي تا(س) نحصل على :

$$\begin{cases} أ = -5 & (1) \\ ب - 5أ = 26 & (2) \\ -5ب = -5 & (3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} أ = -5 \\ ب = 1 \end{cases}$$

- 5 و 1 يحققان (2)

إذن تا(س) = (س – 5) (- 5 س + 1)

2) قيم س المطلوبة هي مجموعة حلول المتراجحة

تا(س) ≤ ها(س) في ح .

لدينا : تا(س) ≤ ها(س) ⟺ - 5 س^2 + 26 س – 5 ≤ 25 س^2 – 1

تا(س) ≤ ها(س) ⟺(- 5 س^2 + 26 س – 5) – (25 س^2 – 1) ≤ 0

تا(س) ≤ ها(س) ⟺ (س-5)(-5س +1) – (5س – 1)(5س+1) ≤ 0

تا(س) ≤ ها(س) ⟺(س -5)(-5س+1)+(-5س+1)(5س+1) ≤ 0

تا(س) ≤ ها(س) ⟺(-5س+1)(س-5+5س+1) ≤ 0

تا(س) ≤ ها(س) ⟺(-5س +1)(6س-4) ≤ 0

لندرس إشارة الجداء : ل = (- 5 س + 1) (6 س – 4)

ل = 0 ⟺ [- 5 س + 1 = 0 أو 6 س – 4 = 0]

ل = 0 ⟺ [س = $\frac{1}{5}$ أو س = $\frac{2}{3}$]

جدول إشارة ل :

س	-∞		$\frac{1}{5}$		$\frac{2}{3}$		+∞
إشارة -5 س+1		+	0	—		—	
إشارة 6 س-4		—		—	0	+	
إشارة(-5س+1)(6س-4)		—	0	+	0	—	

نستنتج من جدول الإشارة أن :

تا(س) ≤ ها(س) من أجل س ∈ [$\frac{1}{5}$ ، $\frac{2}{3}$]

أي أن المتراجحة تا(س) ≤ ها(س) محققة من أجل $\frac{1}{5}$ ≤ س ≤ $\frac{2}{3}$

تمـــاريـــن

. المتراجحات في ح :

1 هل المتراجحتان الآتيتان متكافئتان ؟

1) $4س^2 - 2س < -2س^3 + 4س$ و $-2س^2 + س < س^3 - 2س$

2) $4س^2 - 2س \geq -2س^3 + 4س$ و $2س - 1 \geq -س^2 + 2$

2 حل المتراجحات التالية :

1) $4س - 7 < 0$

2) $5 - 3س > 0$

3) $5س + 4 \leq 0$

4) $7س - 2 > 0$

5) $س - 5 < 0$

6) $3 + 2س < 0$

7) $14 - 5س < 0$

8) $6 + 18س > 0$

9) $4س - 3 < 6س + 1$

10) $2(س-3) \leq س - 8$

3 حل المتراجحات التالية :

1) $3س + 2(س-3) < \frac{س-1}{2}$

2) $\frac{2س-1}{3} - \frac{س+6}{4} > \frac{س-1}{5}$

3) $\frac{7}{2} + \frac{5(1-س)}{4} > \frac{5(س-4)}{5}$

4) $\frac{2س-1}{5} - \frac{2(18-3س)}{15} > \frac{8س}{3} + 7$

5) $\frac{4(س-3)}{4} - \frac{7(2-3س)}{12} < 2 - \frac{س+5}{3}$

6) $\frac{4س-1}{6} + \frac{3-5س}{12} \leq 6 - \frac{س-5}{4}$

7) $4س + \frac{2(5-س)}{16} \geq \frac{4س-7}{8}$

4 حل المتراجحات التالية :

1) $س(س-1) > 0$ 2) $(س-2)(5-3س) <$

3) $(س-1)(س+2) \leq 0$ 4) $(2-س)(س-3) \geq 0$

5) $(س-5)(س+6) > 0$ 6) $(-س-\frac{1}{2})(س+\frac{2}{3}) < 0$

7) $(س-3)(7س-1) < (س+1)(س-3)$

8) $\frac{(س-1)(5س-2)}{3} < \frac{2(س-1)(س+1)}{3}$

9) $س^2-1 < س^2-2س+1$

10) $(س^2-25)(س^4-81) > 0$

11) $(3س-1)^2 - (9س^2-1) > 0$

12) $(س-4)^2 - 5(س-4).(س+2) < 0$

13) $(س-1)^2.(س-2) < (س^2-1).(2-س)$

14) $(4س^2-9)(6س-3) < (6س-3)(2س-3)$

5 ادرس إشارة كل من العبارات التالية .

1) $3س-4$ ؛ 2) $س(س+2)$ ؛ 3) $4س^2-1$

4) $\frac{2-س}{3}$ ؛ 5) $-4-\frac{س}{2}$ ؛ 6) $\frac{2س}{3}(1-س)$

7) $(5س-1)(1-س)$ ؛ 8) $(4س^2-1)(س+2)$

9) $-س(1-3س)$ ؛ 10) $(4س-5)(3س-7)$

11) $س^2+3$ ؛ 12) $(-3س+4)^2$

13) $|2س|+1$ ؛ 14) $3-|س|$

15) $|س(5-س)|$ ؛ 16) $4-(1+\frac{س}{3})^2$

6. حل في ح جمل المتراجحات التالية :

1) $\begin{cases} 2س+3 < س \\ س-5 > 4 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} س+3 < 2 \\ س < 4س-2 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3\text{س} - 1 \geq 0 \\ 2\text{س} < 3\text{س} - 5 \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2\text{س} + 1 > 3 \\ -2\text{س} + 7 > 3 \end{cases}$

5) $\begin{cases} 3\text{س} - 5 > \dfrac{\text{س}}{2} \\ \text{س} - 7 < 2\text{س} + 3 \end{cases}$

6) $\begin{cases} \dfrac{\text{س} - 1}{2} + 3 > \dfrac{\text{س} - 5}{3} \\ \text{س} - 1 > \dfrac{4 - \text{س}}{2} \end{cases}$

7) $\begin{cases} -2\text{س} + 1 < 0 \\ \text{س} - 2(\text{س} + 1) > \dfrac{\text{س} - 5}{3} \end{cases}$

8) $\begin{cases} 5(\text{س} - 2) + 3(\text{س} - 1) > 0 \\ \text{س} - 3 + 4(\text{س} + 2) < 2\text{س} - 1 \end{cases}$

9) $\begin{cases} 2(\text{س} - 5) - \dfrac{3}{2}(\text{س} + 2) < 4 \\ \dfrac{1}{4}(\text{س} - 2) - \dfrac{3}{5}(4 - \text{س}) > 0 \end{cases}$

10) $\begin{cases} \text{س}(\text{س} + 3) - \text{س}(\text{س} - 2) > -5 \\ 3\text{س}(\text{س} - 5) - \text{س}(3\text{س} - 2) > -26 \end{cases}$

16 الأشعة

I. أنشطة تمهيدية

نشاط 1 :

أ ، ب ، جـ نقط من المستوي ليست على استقامة واحدة

• أنشئ النقطة د بحيث يكون أ ب جـ د متوازي أضلاع .

نقول إن الثنائيتين (أ ، د) و (ب ، جـ) متسايريتان .

ويمثلان شعاعا نرمز إليه بالرمز $\overleftarrow{\text{أ د}}$ أو $\overleftarrow{\text{ب جـ}}$ أو $\overleftarrow{\text{ش}}$.

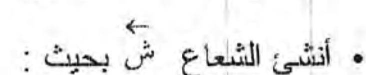
نكتب : $\overleftarrow{\text{ش}} = \overleftarrow{\text{أ د}}$ أو $\overleftarrow{\text{ش}} = \overleftarrow{\text{ب جـ}}$

• الكتابة $\overleftarrow{\text{أ د}}$ تعني تجاوزا ، الشعاع الممثل بالثنائية النقطية (أ ، د) .

نشاط 2 :

$\overleftarrow{\text{أ ب}}$ و $\overleftarrow{\text{ب جـ}}$ شعاعان





• أنشئ الشعاع $\overleftarrow{\text{ش}}$ بحيث :

$$\overleftarrow{\text{ش}} = \overleftarrow{\text{أ ب}} + \overleftarrow{\text{ب جـ}}$$

• أنشئ النقطة د بحيث : $\overleftarrow{\text{أ د}} = \frac{1}{2}\,\overleftarrow{\text{أ جـ}}$

• أنشئ النقطة هـ بحيث : $\overleftarrow{\text{أ هـ}} = -\,\overleftarrow{\text{أ ب}}$.

2. الأشــعة

1) الأشعة المتساوية :

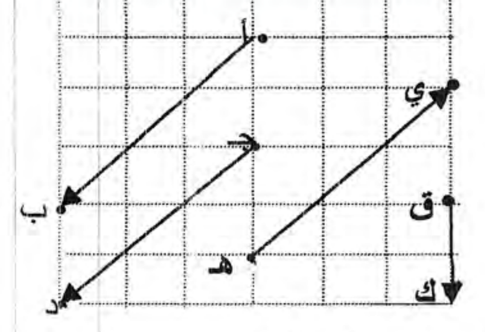
كل شعاع $\overleftarrow{\text{أب}}$ يتعين بما يلي :

- منحاه : هو منحى المستقيم (أ ب)
- إتجاهه : من أ إلى ب
- طويلته : هي طول القطعة [أ ب]

• نرمز إلى طويلة الشعاع $\overleftarrow{\text{أب}}$ بالرمز $\|\overleftarrow{\text{أب}}\|$

ونكتب $\|\overleftarrow{\text{أب}}\| =$ أ ب .

نقول عن شعاعين إنهما متساويان إذا كان لهما نفس المنحى ونفس الإتجاه ونفس الطويلة .



مثال :

في الشكل :

$\overleftarrow{\text{أب}}$ و $\overleftarrow{\text{جـد}}$ لهما نفس المنحى

و نفس الإتجاه ونفس الطويلة

ونكتب :

$\overleftarrow{\text{أب}} = \overleftarrow{\text{جـد}}$.

لاحظ أن : $\overleftarrow{\text{أب}} = \overleftarrow{\text{جـد}}$ معناه أ ب د جـ متوازي أضلاع.

• $\overleftarrow{\text{أب}}$ و $\overleftarrow{\text{هـي}}$ لهما نفس المنحى ونفس الطويلة وهما متعاكسان في الإتجاه فهما غير متساويين .

• $\overleftarrow{\text{أب}}$ و $\overleftarrow{\text{قك}}$ مختلفان في المنحى وفي الإتجاه وفي الطويلة فهما غير متساويين .

• كل ثنائية نقطية من الشكل (أ، أ) تمثل الشعاع المعدوم ونكتب $\overleftarrow{\text{أأ}} = \overleftarrow{0}$

طويلة الشعاع المعدوم هي 0 ومنحاه غير معين .

3. الجمع الشعاعي

1) علاقة شال :

أ وَ جـ نقطتان .

مهما كانت النقطة ب لدينا :

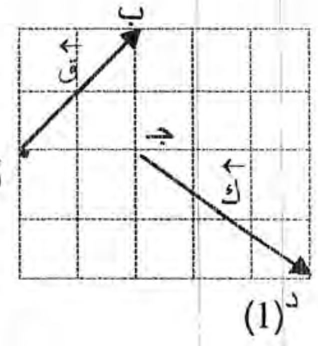
$\overleftarrow{\text{أجـ}} = \overleftarrow{\text{أب}} + \overleftarrow{\text{بجـ}}$.

الشعاع $\overleftarrow{\text{أجـ}}$ هو مجموع الشعاعين $\overleftarrow{\text{أب}}$ وَ $\overleftarrow{\text{بجـ}}$.

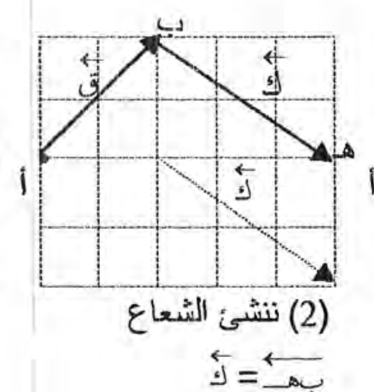
لاحظ أن نهاية (أ ، ب) هي بداية (ب ، جـ) .

2) مجموع شعاعين :

ليكن : $\overleftarrow{\text{ق}} = \overleftarrow{\text{أب}}$ وَ $\overleftarrow{\text{ك}} = \overleftarrow{\text{أد}}$. لنعين $\overleftarrow{\text{ق}} + \overleftarrow{\text{ك}}$:

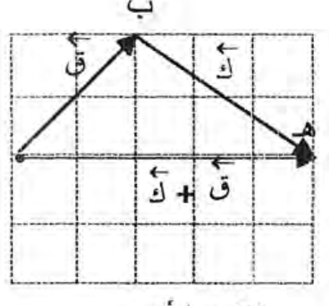


(1)



(2) ننشئ الشعاع

$\overleftarrow{\text{بهـ}} = \overleftarrow{\text{ك}}$



(3) بما أن :

$\overleftarrow{\text{أب}} + \overleftarrow{\text{بهـ}} = \overleftarrow{\text{أهـ}}$

فإن $\overleftarrow{\text{أهـ}} = \overleftarrow{\text{ق}} + \overleftarrow{\text{ك}}$

. الشعاع المعاكس لشعاع :

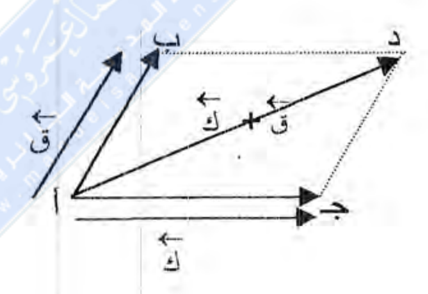
ليكن الشعاع $\overleftarrow{\text{ش}} = \overleftarrow{\text{أب}}$

لدينا : $\overleftarrow{\text{أب}} + \overleftarrow{\text{بأ}} = \overleftarrow{0}$

يسمى الشعاع $\overleftarrow{\text{بأ}}$ الشعاع المعاكس للشعاع $\overleftarrow{\text{أب}}$

ونكتب : $\overleftarrow{\text{بأ}} = -\overleftarrow{\text{أب}} = -\overleftarrow{\text{ش}}$

3) قاعدة متوازي الأضلاع



إذا كان :

$\overleftarrow{\text{ق}} = \overleftarrow{\text{أب}}$ ؛ $\overleftarrow{\text{ك}} = \overleftarrow{\text{أجـ}}$

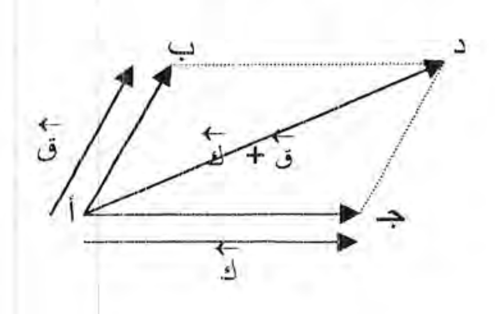
فإن : $\overleftarrow{\text{ق}} + \overleftarrow{\text{ك}} = \overleftarrow{\text{أد}}$

حيث أ ب د جـ متوازي أضلاع .

أمثلة :

. لإنشاء مجموع شعاعين $\overleftarrow{\text{ق}}$ ، $\overleftarrow{\text{ك}}$ نختار نقطة مثل أ ثم ننشئ متوازي الأضلاع أ ب د جـ بحيث $\overleftarrow{\text{أب}} = \overleftarrow{\text{ق}}$ و $\overleftarrow{\text{أجـ}} = \overleftarrow{\text{ك}}$ فيكون :

$\overleftarrow{\text{ق}} + \overleftarrow{\text{ك}} = \overleftarrow{\text{أد}}$



. **إيجاد الفرق** $\overleftarrow{\text{ق}} - \overleftarrow{\text{ك}}$ **:**

لدينا : $\overleftarrow{\text{جـد}} = \overleftarrow{\text{ق}}$

و $\overleftarrow{\text{دب}} = \overleftarrow{\text{جـأ}} = -\overleftarrow{\text{أجـ}} = -\overleftarrow{\text{ك}}$

إذن :

$\overleftarrow{\text{ق}} - \overleftarrow{\text{ك}} = \overleftarrow{\text{أب}} - \overleftarrow{\text{أجـ}}$

$\overleftarrow{\text{ق}} - \overleftarrow{\text{ك}} = \overleftarrow{\text{جـد}} - \overleftarrow{\text{دب}}$

$\overleftarrow{\text{ق}} - \overleftarrow{\text{ك}} = \overleftarrow{\text{جـب}}$

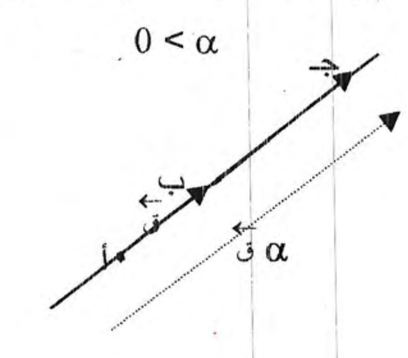
ملاحظة : إذا كان للشعاعين $\overleftarrow{\text{ق}}$ ، $\overleftarrow{\text{ك}}$ نفس المنحى نستعمل علاقة شال لإيجاد مجموعهما .

4 . ضرب شعاع بعدد

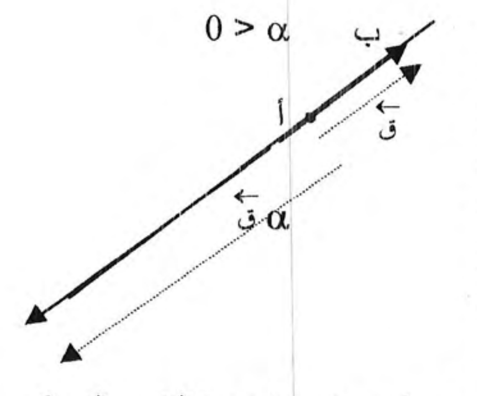
1) تعريف

ليكن $\overrightarrow{\text{ش}}$ شعاعا غير معدوم وَ α عدداً حقيقيا غير معدوم
جداء الشعاع $\overrightarrow{\text{ش}}$ وَ العدد α هو الشعاع $\alpha\overrightarrow{\text{ش}}$ بحيث :
. $\alpha\overrightarrow{\text{ش}}$ وَ $\overrightarrow{\text{ش}}$ لهما نفس المنحى .
. إذا كان $\alpha > 0$ فإن $\alpha\overrightarrow{\text{ش}}$ وَ $\overrightarrow{\text{ش}}$ لهما نفس الإتجاه ،
وإذا كان $\alpha < 0$ فإن $\alpha\overrightarrow{\text{ش}}$ وَ $\overrightarrow{\text{ش}}$ لهما اتجاهان متعاكسان
. طويلة الشعاع $\alpha\overrightarrow{\text{ش}}$ هي الجداء $|\alpha|\,\|\overrightarrow{\text{ش}}\|$.

ليكن $\overrightarrow{\text{ق}} = \overrightarrow{\text{أب}}$ و $\alpha\overrightarrow{\text{ق}} = \overrightarrow{\text{أجـ}}$



ب وَ جـ من جهة واحدة بالنسبة إلى النقطة أ
أ جـ = $|\alpha|$ × أ ب = α × أ ب



ب وَ جـ من جهتين مختلفتين بالنسبة إلى النقطة أ
أ جـ = $|\alpha|$ × أ ب = $-\alpha$ × أ ب

حالة خاصة

. نصطلح على أن : $0 . \overrightarrow{\text{ش}} = \overrightarrow{0}$ ، $\alpha . \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}$
. إذا كان $\alpha\overrightarrow{\text{ش}} = \overrightarrow{0}$ فإن $\alpha = 0$ أو $\overrightarrow{\text{ش}} = \overrightarrow{0}$

مثال :

$\overrightarrow{\text{أب}}$ شعاع

. لننشئ الشعاع $\overrightarrow{\text{أجـ}}$ بحيث :

$$\overrightarrow{\text{أجـ}} = \frac{7}{3}\ \overrightarrow{\text{أب}}$$

نقسم القطعة [أ ب] إلى ثلاثة أجزاء متساوية وليكن أ ب = 3 α

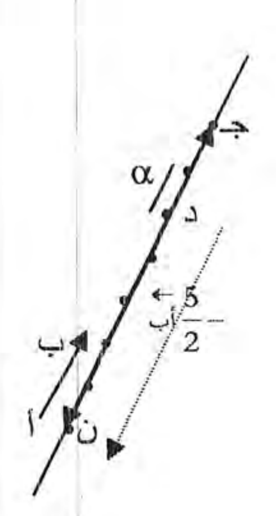
ثم ننشئ النقطة جـ من [أ ب) بحيث :

أ جـ = 7 α فيكون : $\overrightarrow{\text{أجـ}} = \frac{7}{3}\ \overrightarrow{\text{أب}}$

. د نقطة و $\overrightarrow{\text{أب}}$ شعاع

لننشئ الشعاع $\overrightarrow{\text{دن}}$ بحيث

$$\overrightarrow{\text{دن}} = -\frac{5}{2}\ \overrightarrow{\text{أب}}$$



• نفرض $\overrightarrow{\text{دجـ}} = \overrightarrow{\text{أب}}$. لنقسم القطعة [د جـ] إلى جزئين متساويين وليكن د جـ = 2 α

• نعين النقطة ن من (د جـ) بحيث :

• $\overrightarrow{\text{دن}}$ ، $\overrightarrow{\text{دجـ}}$ لهما اتجاهان متعاكسان

• د ن = 5 α

فيكون : $\overrightarrow{\text{دن}} = -\frac{5}{2}\ \overrightarrow{\text{أب}}$

2) بعض قواعد الحساب الشعاعي

نستعمل ، في الحساب الشعاعي القواعد التالية :

α و β عددان حقيقيان .

$\overleftarrow{\text{ق}}$ و $\overleftarrow{\text{ك}}$ شعاعان

لدينا : $\alpha\overleftarrow{\text{ق}} + \alpha\overleftarrow{\text{ك}} = \alpha(\overleftarrow{\text{ق}} + \overleftarrow{\text{ك}})$

$\alpha(\beta\overleftarrow{\text{ق}}) = (\alpha\beta)\overleftarrow{\text{ق}}$

$\alpha\overleftarrow{\text{ق}} + \beta\overleftarrow{\text{ق}} = (\alpha + \beta)\overleftarrow{\text{ق}}$

أمثلة :

. $3\overleftarrow{\text{أب}} + 3\overleftarrow{\text{بجـ}} = 3(\overleftarrow{\text{أب}} + \overleftarrow{\text{بجـ}})$

$= 3\overleftarrow{\text{أجـ}}$ (علاقة شال)

. $2(\frac{5}{2}\overleftarrow{\text{أب}}) = (2 \times \frac{5}{2})\overleftarrow{\text{أب}}$

$= 5\overleftarrow{\text{أب}}$

. $4\overleftarrow{\text{أب}} - 6\overleftarrow{\text{أب}} = (4 - 6)\overleftarrow{\text{أب}}$

$= -2\overleftarrow{\text{أب}}$

3) الأشعة المتوازية

تعريف :

$\overleftarrow{\text{ق}}$ ، $\overleftarrow{\text{ك}}$ شعاعان

نقول إن $\overleftarrow{\text{ق}}$ يوازي $\overleftarrow{\text{ك}}$ إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي α

بحيث يكون : $\overleftarrow{\text{ق}} = \alpha . \overleftarrow{\text{ك}}$

نرمز لتوازي الشعاعين $\overleftarrow{\text{ق}}$ ، $\overleftarrow{\text{ك}}$ بالرمز $\overleftarrow{\text{ق}} \mathbin{//} \overleftarrow{\text{ك}}$

. بما أن $\overleftarrow{0} = 0 . \overleftarrow{\text{ق}}$ فإن الشعاع المعدوم يوازي أي شعاع

. كل شعاعين غير معدومين ولهما نفس المنحى ، هما متوازيان .

. $\overleftarrow{\text{أب}} \mathbin{//} \overleftarrow{\text{جـد}} \Leftrightarrow (\text{أب}) \mathbin{//} (\text{جـد})$

مثال : أ ب جـ د شبه منحرف (الشكل) .

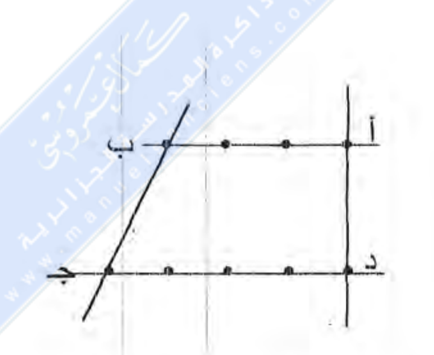
أ ب = 3 ، جـ د = 4

. بما أن (أ ب) // (جـ د)

فإن الشعاعين $\overleftarrow{\text{أب}}$ و $\overleftarrow{\text{جـد}}$ متوازيان .

أي يوجد عدد حقيقي α بحيث

$\overleftarrow{\text{أب}} = \alpha\ \overleftarrow{\text{جـد}}$

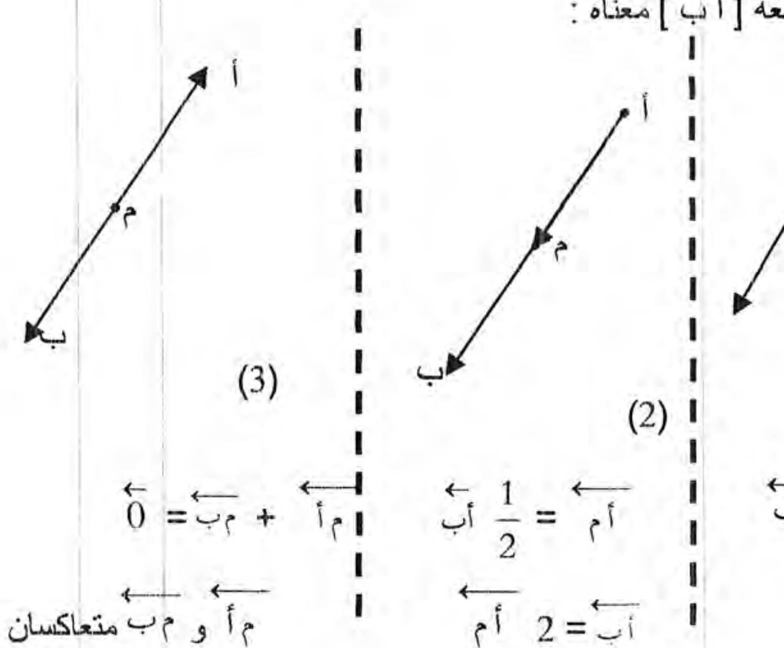


أب= 3.($\frac{1}{4}$ جـ د) = $\frac{3}{4}$ جـ د . $\overleftarrow{\text{أب}}$ و $\overleftarrow{\text{جـد}}$ لهما إتجاهان متعاكسان إذن :

. $\overleftarrow{\text{أب}} = 3 . (-\frac{1}{4}\ \overleftarrow{\text{جـد}}) = -\frac{3}{4}\ \overleftarrow{\text{جـد}}$

4) منتصف قطعة مستقيمة :

م منتصف القطعة [أ ب] معناه :



(1) $\overleftarrow{\text{أم}} = \overleftarrow{\text{مب}}$

(2) $\overleftarrow{\text{أم}} = \frac{1}{2}\ \overleftarrow{\text{أب}}$ ، $\overleftarrow{\text{أب}} = 2\ \overleftarrow{\text{أم}}$

(3) $\overleftarrow{\text{مأ}} + \overleftarrow{\text{مب}} = \overleftarrow{0}$ ، $\overleftarrow{\text{مأ}}$ و $\overleftarrow{\text{مب}}$ متعاكسان

5 . المعلم الخطي

. (ق) مستقيم ، $\overleftarrow{و}$ شعاع غير معدوم منحاه هو منحى (ق) .

الثنائية (ق ، $\overleftarrow{و}$) تسمى محورا .

- المستقيم (ق) هو حامل المحور (ق ، $\overleftarrow{و}$) .

- الشعاع $\overleftarrow{و}$ يسمى شعاع الوحدة للمحور (ق ، $\overleftarrow{و}$) (ق)

- ويسمى أيضا أساسا للمستقيم (ق) .

. (ق) مستقيم ، م و أ نقطتان منه .

$\overleftarrow{و}$ شعاع بحيث : $\overleftarrow{و} = \overleftarrow{مأ}$.

- الثنائية (م ، $\overleftarrow{و}$) تسمى معلما للمستقيم (ق)

- النقطة م تسمى مبدأ المعلم (م ، $\overleftarrow{و}$)

- الشعاع $\overleftarrow{و}$ يسمى شعاع الوحدة للمعلم (م ، $\overleftarrow{و}$)

فاصلة نقطة :

(م ، $\overleftarrow{و}$) معلم للمستقيم (ق)

ن نقطة من (ق)

الشعاعان $\overleftarrow{و}$ ، $\overleftarrow{من}$ متوازيان .

إذن يوجد عدد حقيقي س بحيث : $\overleftarrow{من}$ = س. $\overleftarrow{و}$

العدد س يسمى فاصلة النقطة ن بالنسبة إلى المعلم (م ، $\overleftarrow{و}$)

. القيس الجبري لشعاع :

من أجل كل نقطتين أ و ب من المستقيم (ق) يكون الشعاع $\overrightarrow{\text{أب}}$ موازيا للشعاع $\overrightarrow{\text{و}}$ ، إذن :

يوجد عدد حقيقي وحيد α بحيث :

$$\overrightarrow{\text{أب}} = \alpha \, \overrightarrow{\text{و}}$$

العدد α يسمى القيس الجبري للشعاع $\overrightarrow{\text{أب}}$ بالنسبة للمعلم (م ، $\overrightarrow{\text{و}}$) ونرمز إليه بالرمز $\overline{\text{أب}}$.

تعريف :

> (ق ، $\overrightarrow{\text{و}}$) محور ، أ ، ب نقطتان من (ق)
>
> القيس الجبري للشعاع $\overrightarrow{\text{أب}}$ هو العدد الحقيقي $\overline{\text{أب}}$ بحيث :
>
> $\overrightarrow{\text{أب}} = \overline{\text{أب}} \, . \, \overrightarrow{\text{و}}$

6 . تطبيقات

1) علاقة شال الجبرية

أ ، ب ، جـ ثلاث نقط من مستقيم مزود بمعلم (م ، $\overrightarrow{\text{و}}$)

تكتب علاقة شال $\overrightarrow{\text{أب}} + \overrightarrow{\text{ب جـ}} = \overrightarrow{\text{أ جـ}}$

بالقياسات الجبرية كما يلي :

$$\overline{\text{أب}} + \overline{\text{ب جـ}} = \overline{\text{أ جـ}}$$

التعبير عن $\overline{\text{أب}}$ بدلالة $س_{أ}$ و $س_{ب}$:

في المعلم (م ، $\overrightarrow{\text{و}}$) فاصلة النقطة أ هي $س_{أ}$ وفاصلة النقبطة ب هي $س_{ب}$.

لدينا : $\overrightarrow{\text{أب}} = \overrightarrow{\text{أم}} + \overrightarrow{\text{م ب}}$ (علاقة شال)

$\overrightarrow{أب} = -\overrightarrow{مأ} + \overrightarrow{مب}$

$\overrightarrow{أب} = \overrightarrow{مب} - \overrightarrow{مأ} = س_{ب}\vec{و} - س_{أ}\vec{و}$

$\overrightarrow{أب} = (س_{ب} - س_{أ})\vec{و} = \overline{أب}.\vec{و}$

إذن : $\overline{أب} = س_{ب} - س_{أ}$ (فاصلة النهاية – فاصلة البداية)

2) فاصلة منتصف قطعة مستقيمة :

(م ، $\vec{و}$) معلم للمستقيم (ق) .

أ ، ب نقطتان من (ق) .

لنبحث عن $س_{هـ}$ فاصلة النقطة هـ منتصف القطعة [أ ، ب]

لدينا : هـ منتصف [أ ، ب] ⟺ $\overrightarrow{هـأ} + \overrightarrow{هـب} = \vec{0}$

⟺ $\overline{هـأ}\,\vec{و} + \overline{هـب}\,\vec{و} = \vec{0}$

⟺ $(\overline{هـأ} + \overline{هـب})\,\vec{و}$

⟺ $\overline{هـأ} + \overline{هـب} = 0$

⟺ $(\overline{هـم} + \overline{مأ}) + (\overline{هـم} + \overline{مب}) = 0$

⟺ $2\,\overline{هـم} + \overline{مأ} + \overline{مب} = 0$

⟺ $-2\,\overline{مهـ} + \overline{مأ} + \overline{مب} = 0$

⟺ $2\,\overline{مهـ} = \overline{مأ} + \overline{مب}$

⟺ $2\,س_{هـ} = س_{أ} + س_{ب}$

ومنه :

هـ منتصف [أ ب] ⟺ $س_{هـ} = \frac{س_{أ} + س_{ب}}{2}$

7 . تمرين محلول

أ ب جـ د متوازي أضلاع .
النقطتان هـ و ي هما على الترتيب منتصفا الضلعين [ب جـ] و [د جـ] .
برهن أن :

1 . $\overleftarrow{\text{أ جـ}} + \overleftarrow{\text{ب د}} = 2\,\overleftarrow{\text{ب جـ}}$

2 . $\overleftarrow{\text{أ هـ}} + \overleftarrow{\text{أ ي}} = \frac{3}{2}\,\overleftarrow{\text{أ جـ}}$

3 . بيّن أن الشعاعين $\overleftarrow{\text{هـ ي}}$ و $\overleftarrow{\text{ب د}}$ متوازيان .

الحل :

. نترجم المعطيات بالشكل المجاور

1 . للبرهان على المساواة :

$$\overleftarrow{\text{أ جـ}} + \overleftarrow{\text{ب د}} = 2\,\overleftarrow{\text{ب جـ}}$$

لدينا : $\overleftarrow{\text{أ جـ}} = \overleftarrow{\text{أ ب}} + \overleftarrow{\text{ب جـ}} \quad ...(1)$

و $\overleftarrow{\text{ب د}} = \overleftarrow{\text{ب أ}} + \overleftarrow{\text{ب جـ}} \quad ....(2)$

بالجمع نجد :

$$\overleftarrow{\text{أ جـ}} + \overleftarrow{\text{ب د}} = (\overleftarrow{\text{أ ب}} + \overleftarrow{\text{ب جـ}}) + (\overleftarrow{\text{ب أ}} + \overleftarrow{\text{أ د}})$$

$$= (\overleftarrow{\text{أ ب}} + \overleftarrow{\text{ب أ}}) + \overleftarrow{\text{ب جـ}} + \overleftarrow{\text{أ د}}$$

$$= \overleftarrow{\text{أ أ}} + \overleftarrow{\text{ب جـ}} + \overleftarrow{\text{أ د}}$$

$$= \overleftarrow{0} + \overleftarrow{\text{ب جـ}} + \overleftarrow{\text{أ د}}$$

$$\overleftarrow{\text{أ جـ}} + \overleftarrow{\text{ب د}} = \overleftarrow{\text{ب جـ}} + \overleftarrow{\text{ب جـ}} = 2\,\overleftarrow{\text{ب جـ}}$$

($\overleftarrow{\text{أ د}} = \overleftarrow{\text{ب جـ}}$ لأن أ ب جـ د موازي أضلاع)

2 . للبرهان على المساواة : $\overleftarrow{\text{أهـ}} + \overleftarrow{\text{أى}} = \frac{3}{2}\overleftarrow{\text{أجـ}}$

لدينا : $\overleftarrow{\text{أهـ}} = \overleftarrow{\text{أجـ}} + \overleftarrow{\text{جـهـ}}$ و $\overleftarrow{\text{أى}} = \overleftarrow{\text{أجـ}} + \overleftarrow{\text{جـى}}$

$= \overleftarrow{\text{أجـ}} + \frac{1}{2}\overleftarrow{\text{جـب}}$ و $\overleftarrow{\text{أى}} = \overleftarrow{\text{أجـ}} + \frac{1}{2}\overleftarrow{\text{جـد}}$

بالجمع نجد :

$$\overleftarrow{\text{أهـ}} + \overleftarrow{\text{أى}} = \left(\overleftarrow{\text{أجـ}} + \frac{1}{2}\overleftarrow{\text{جـب}}\right) + \left(\overleftarrow{\text{أجـ}} + \frac{1}{2}\overleftarrow{\text{جـد}}\right)$$

$$= 2\overleftarrow{\text{أجـ}} + \frac{1}{2}\left(\overleftarrow{\text{جـب}} + \overleftarrow{\text{جـد}}\right)$$

$$= 2\overleftarrow{\text{أجـ}} + \frac{1}{2}\overleftarrow{\text{جـأ}}$$

$$= 2\overleftarrow{\text{أجـ}} - \frac{1}{2}\overleftarrow{\text{أجـ}}$$

$$\overleftarrow{\text{أهـ}} + \overleftarrow{\text{أى}} = \frac{3}{2}\overleftarrow{\text{أجـ}}$$

3 . لنبين أن $\overleftarrow{\text{هـى}}$ و $\overleftarrow{\text{بد}}$ متوازيان .

لدينا : $\overleftarrow{\text{هـى}} = \overleftarrow{\text{هـجـ}} + \overleftarrow{\text{جـى}}$

$$= \frac{1}{2}\overleftarrow{\text{بجـ}} + \frac{1}{2}\overleftarrow{\text{جـد}}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\overleftarrow{\text{بجـ}} + \overleftarrow{\text{جـد}}\right)$$

$\overleftarrow{\text{هـى}} = \frac{1}{2}\overleftarrow{\text{بد}}$ وهذا يعني أن : $\overleftarrow{\text{هـى}} \mathbin{//} \overleftarrow{\text{بد}}$

تمـــاريـــن

. تمثيل الأشعة

1 . أ ب جـ مثلث حيث :

أ ب = 4 سنتم ؛ أ جـ = 3 سنتم ؛ ب جـ = 4 , 5 سنتم

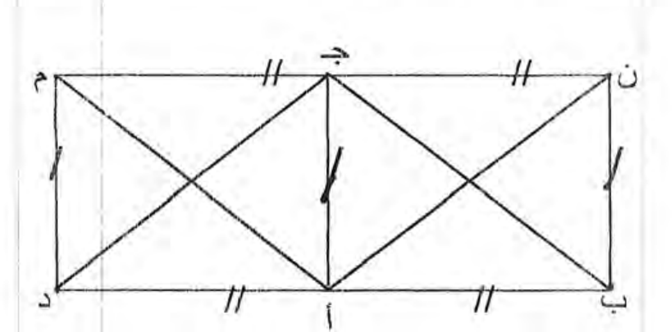
1) ارسم النقط م ، ن ، هـ بحيث :

$\overleftarrow{\text{أم}} = \overleftarrow{\text{ب جـ}}$ ؛ $\overleftarrow{\text{م ن}} = \overleftarrow{\text{أب}} + \overleftarrow{\text{أ جـ}}$ ؛ $\overleftarrow{\text{أهـ}} = \overleftarrow{\text{ب جـ}} - \overleftarrow{\text{أ جـ}}$

2) اذكر كل متوازيات الأضلاع التي رؤوسها من بين النقط : أ ، ب ، جـ ، م
ن ، هـ .

2 . في الشكل المجاور ، أ ب جـ مثلث قائم في أ حيث :

أ ب = 4 سنتم ؛ أ جـ = 3 سنتم



أكمل المساواتيات التالية :

1) $\overleftarrow{\text{ب أ}} + \overleftarrow{\text{جـ م}} = \text{ب....}$ ؛ $\overleftarrow{\text{أم}} + \overleftarrow{\text{أب}} = \overleftarrow{\text{أ...}}$

$\overleftarrow{\text{ن جـ}} + \overleftarrow{\text{ب جـ}} = \text{ب....}$ ؛ $\overleftarrow{\text{د ب}} + \overleftarrow{\text{د م}} = \overleftarrow{\text{د...}}$

$\overleftarrow{\text{م ن}} + \overleftarrow{\text{م ب}} = \overleftarrow{\text{د...}}$ ؛ $\overleftarrow{\text{ب جـ}} - \overleftarrow{\text{د م}} = \overleftarrow{\text{جـ....}}$

2) $\overleftarrow{\text{جـ د}} - \overleftarrow{\text{جـ م}} = \text{....}$ ؛ $\overleftarrow{\text{أ جـ}} - \overleftarrow{\text{أب}} = \text{......}$

$\overleftarrow{\text{أب}} + \overleftarrow{\text{أجـ}} = ...$ ؛ $\overleftarrow{\text{نب}} + \overleftarrow{\text{جـأ}} - \overleftarrow{\text{نأ}} = ...$

$\overleftarrow{\text{ند}} + \overleftarrow{\text{بجـ}} - \overleftarrow{\text{جـد}} = ...$ ؛ $\overleftarrow{\text{نأ}} - \overleftarrow{\text{بأ}} = ...$

3 أنشئ الشعاعين $\overleftarrow{\text{ق}}$ ، $\overleftarrow{\text{ك}}$ بحيث يكون منحى $\overleftarrow{\text{ق}}$ افقيا ويكون منحى $\overleftarrow{\text{ك}}$ عموديا" ويكون : $\overleftarrow{\text{ش}} = \overleftarrow{\text{ق}} + \overleftarrow{\text{ك}}$ ؛ ثم احسب طويلتي $\overleftarrow{\text{ق}}$ و $\overleftarrow{\text{ك}}$ ، في كل من الحالات التالية .

أ) : $\|\overleftarrow{\text{ش}}\| = 3$

ب) : $\|\overleftarrow{\text{ش}}\| = 2,5$

جـ) : $\|\overleftarrow{\text{ش}}\| = \sqrt{3}$

4 [أ ب] قطعة مستقيمة طولها 6 ستم .

1) أنشئ النقطتين جـ و د بحيث :

$\overleftarrow{\text{أجـ}} = \frac{3}{2}\overleftarrow{\text{أب}}$ ؛ $\overleftarrow{\text{جـد}} = -\frac{2}{3}\overleftarrow{\text{أب}}$

2) أوجد العددين α و β بحيث

$\overleftarrow{\text{أد}} = \alpha\,\overleftarrow{\text{أب}}$ ؛ $\overleftarrow{\text{دب}} = \beta\,\overleftarrow{\text{أب}}$

5 أ ب جـ مثلث حيث :

أ ب = 5 سم ؛ أ جـ = 6 سم ؛ ب جـ = 4 سم

أنشئ النقاط هـ ، ف ، ق ، ك ، بحيث

$2\overleftarrow{\text{أهـ}} = \overleftarrow{\text{أب}}$ ، $4\overleftarrow{\text{بف}} = \overleftarrow{\text{بجـ}}$ ؛ $2\overleftarrow{\text{أق}} = -\overleftarrow{\text{أجـ}}$

6 أ ب جـ مثلث كيفي .
أنشئ النقطتين د و هـ بحيث :

$\overleftarrow{\text{أد}} = 2\,\overleftarrow{\text{بجـ}}$ و $\overleftarrow{\text{أهـ}} = -\,\overleftarrow{\text{بجـ}}$

عبّر عن الشعاع $\overleftarrow{\text{هـد}}$ بدلالة الشعاع $\overleftarrow{\text{بجـ}}$.

. الحساب الشعاعي

7 بسط ، باستعمال علاقة شال كتابة الأشعة التالية

1) $\overleftarrow{\text{ق}} = \overleftarrow{\text{أب}} - \overleftarrow{\text{أجـ}} - \overleftarrow{\text{جـب}}$

$\overleftarrow{\text{ك}} = -\,\overleftarrow{\text{بأ}} + \overleftarrow{\text{بد}} - \overleftarrow{\text{بجـ}}$

$\overleftarrow{\text{ل}} = \overleftarrow{\text{جـد}} - \overleftarrow{\text{أد}} + \overleftarrow{\text{أب}}$

2) $\overleftarrow{\text{ق}} = \overleftarrow{\text{دأ}} + \overleftarrow{\text{بجـ}} + \overleftarrow{\text{جـد}}$

$\overleftarrow{\text{ك}} = \overleftarrow{\text{أجـ}} + 2\,\overleftarrow{\text{جـب}} + \overleftarrow{\text{بأ}}$

$\overleftarrow{\text{ل}} = 2\,\overleftarrow{\text{أب}} - \overleftarrow{\text{بجـ}} - \overleftarrow{\text{جـأ}}$

8 عبر بأ بسط ما يمكن عما يلي :

1) $\overleftarrow{\text{ق}} - 2(\overleftarrow{\text{ق}} + \overleftarrow{\text{ك}}) - \frac{1}{3}\overleftarrow{\text{ك}}$

2) $\frac{2}{5}\overleftarrow{\text{ق}} + \overleftarrow{\text{ق}} - \frac{1}{4}(\overleftarrow{\text{ق}} - \overleftarrow{\text{ك}})$

3) $\frac{1}{2}(\overleftarrow{\text{ق}} - \overleftarrow{\text{ك}}) - 1(\overleftarrow{\text{ق}} + \overleftarrow{\text{ك}})$

4) $5\,\overleftarrow{\text{ق}} - 3\,\overleftarrow{\text{ك}} - (\overleftarrow{\text{ق}} + \overleftarrow{\text{ك}})$

2) عبر بدلالة $\overleftarrow{\text{أب}}$ و $\overleftarrow{\text{أجـ}}$ عما يلي :

$2\,\overleftarrow{\text{أب}} - \frac{1}{3}\,\overleftarrow{\text{أجـ}} + \overleftarrow{\text{بجـ}}$ ؛ $\overleftarrow{\text{بأ}} + 3\,\overleftarrow{\text{جـأ}} - 2\,\overleftarrow{\text{بجـ}}$.

$\frac{2}{5}\left(\overleftarrow{\text{أب}} - 5\,\overleftarrow{\text{بجـ}}\right) + \overleftarrow{\text{جـأ}}$ ؛ $2\left(\overleftarrow{\text{مأ}} - \overleftarrow{\text{أجـ}}\right) + \overleftarrow{\text{مب}} - 3\,\overleftarrow{\text{مجـ}}$.

9 $\overleftarrow{\text{ق}}$ ، $\overleftarrow{\text{ك}}$ ، $\overleftarrow{\text{ل}}$ ثلاثة أشعة . عيّن العدد الحقيقي α بحيث $\overleftarrow{\text{ل}} = \alpha\,\overleftarrow{\text{ق}}$

علما بأن :

1) $\overleftarrow{\text{ك}} = \frac{1}{2}\,\overleftarrow{\text{ق}}$ و $\overleftarrow{\text{ل}} = -\frac{4}{5}\,\overleftarrow{\text{ك}}$

2) $\overleftarrow{\text{ق}} = -3\,\overleftarrow{\text{ك}}$ و $\overleftarrow{\text{ل}} = \frac{5}{2}\,\overleftarrow{\text{ق}}$

3) $\overleftarrow{\text{ق}} = -\frac{5}{4}\,\overleftarrow{\text{ك}}$ و $\overleftarrow{\text{ك}} = -\frac{2}{3}\,\overleftarrow{\text{ل}}$

10 أ ، ب ، جـ ، هـ أربع نقط من مستقيم (الشكل) .

هـ ب أ جـ

1) استعمل التدريج المبيّن لاكمال المساويات الشعاعية التالية :

$\overleftarrow{\text{أجـ}} = \dots\dots\ \overleftarrow{\text{أب}}$ ؛ $\overleftarrow{\text{جـهـ}} = \dots\ \overleftarrow{\text{أب}}$ ؛ $\overleftarrow{\text{هـب}} = \dots\ \overleftarrow{\text{أب}}$

2) ليكن الشعاع : $\overleftarrow{\text{و}} = \frac{1}{2}\,\overleftarrow{\text{أب}}$. عيّن بالنسبة إلى المعلم (أ ، $\overleftarrow{\text{و}}$)

الأقياس الجبرية التالية :

$\overline{\text{أب}}$ ، $\overline{\text{أجـ}}$ ، $\overline{\text{جـهـ}}$ ، $\overline{\text{هـب}}$ ، $\overline{\text{بجـ}}$

11 (م ، $\overleftarrow{و}$) معلم لمستقيم (ق)

علّم على (ق) النقط أ ، ب ، جـ ، د التي فواصلها هي على الترتيب :

4 ، $\frac{15}{2}$ ، -1 ، $-\frac{11}{3}$

1) احسب الأقياس الجبرية التالية :

$\overline{أب}$ ، $\overline{ب جـ}$ ، $\overline{أد}$ ، $\overline{جـ أ}$ ، $\overline{أجـ} - \overline{أد}$ ، $2\,\overline{م ب} - \overline{ب جـ}$

2) عين العدد س فاصلة النقطة ن في كل من الحالات التالية :

أ) $\overline{أن} = 3$

ب) $2\,\overline{جـ ن} + \overline{ن أ} = 1$

جـ) $2\,\overline{م ب} = 3\,\overline{أن}$

د) $0 \leq \overline{جـ ن} \leq 2$

هـ) $3\,\overline{أن} = \overline{أجـ}$

ى) $\overline{أن}^2 = 4$

17 المعـــلم المســتوي

1-أنشطة تمهيدية

نشاط 1 :

(م ، $\vec{و}$) معلم لمستقيم (ق) .

. علّم على (ق) النقط التالية :

أ (- 2) ، ب ($\frac{3}{2}$) جـ (4) .

. احسب كلا من : $\overline{أب}$ ، $\overline{أجـ}$ ، $\overline{جـب}$

. استنتج الأطوال : أ ب ، أ جـ ، جـ ب

. عيّن النقطة هـ منتصف [ب جـ]

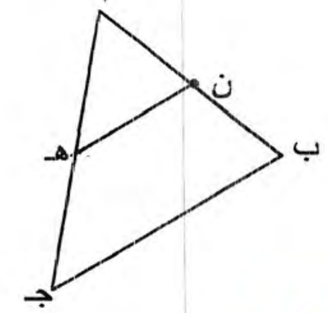


. نشاط 2 :

أ ب جـ مثلث

ن و هـ هما منتصفا الضلعين

[أ ب] و [أ جـ]



. برهن أن : $\overrightarrow{ن هـ} = \frac{1}{2}\ \overrightarrow{ب جـ}$

. استنتج أن (ن هـ) // (ب جـ)

2 . المعلم المستوي

1) تعريف

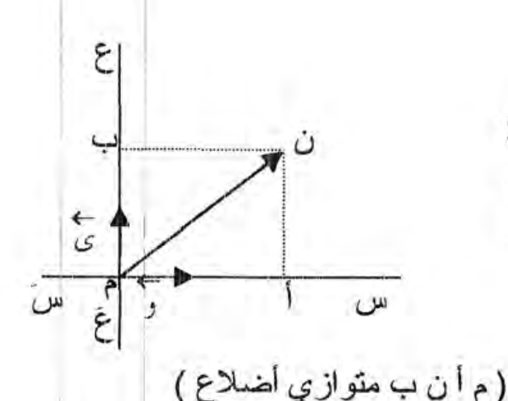
> م نقطة من المستوي
>
> $\vec{و}$ ، $\vec{ى}$ شعاعان غير متوازيين .
>
> الثلاثية (م ، $\vec{و}$ ، $\vec{ى}$) تسمى معلما للمستوي .

معلم متعامد متجانس	معلم متعامد	معلم كيفي
• الشعاعان $\vec{و}$ و $\vec{ى}$ متعامدان وطويلة كل منهما 1	• الشعاعان $\vec{و}$ و $\vec{ى}$ متعامدان	• الشعاعان $\vec{و}$ و $\vec{ى}$ غير متعامدين

. في كل ما يأتي :

- الثلاثية (م ، $\vec{و}$ ، $\vec{ى}$) هي معلم متعامد متجانس للمستوي .
- نرمز إلى حامل شعاع الوحدة $\vec{و}$ بالرمز (س َس) ونسمي (سَ س ، $\vec{و}$) محور الفواصل و إلى حامل شعاع الوحدة $\vec{ى}$ بالرمز (عَ ع) ونسمي (عَ ع ، $\vec{ى}$) محور التراتيب

2) احداثيا نقطة .



(م ، $\vec{و}$ ، $\vec{ى}$) معلم للمستوي :
ليكن أ ، ب هما المسقطان العموديان للنقطة ن على (س/س) و (ع/ ع) على الترتيب .
فيكون :

$\overrightarrow{م ن} = \overrightarrow{م أ} + \overrightarrow{م ب}$ (م أ ن ب متوازي أضلاع)

$= \overline{م أ}\ \vec{و} + \overline{م ب}\ \vec{ى}$

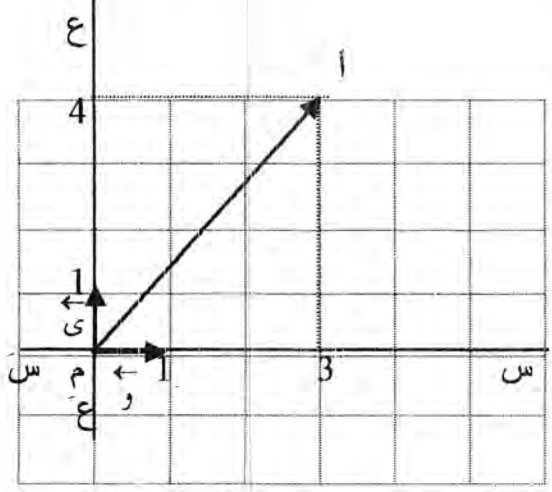
وبوضع : $س = \overline{مأ}$ ، $ع = \overline{مب}$ يكون :

$$\overleftarrow{من} = س\,\overleftarrow{و} + ع\,\overleftarrow{ى}$$

تمثل الثنائية (س ، ع) من جهة إحداثيي النقطة ن بالنسبة إلى المعلم (م، $\overleftarrow{و}$ ، $\overleftarrow{ى}$) و تمثل من جهة أخرى المركبتين السلميتين للشعاع $\overleftarrow{من}$ بالنسبة إلى المعلم نفسه .

نكتب : ن (س ، ع) و نقرأ النقطة ن فاصلتها س و ترتيبها ع

كما نكتب : $\overleftarrow{من} \begin{pmatrix} س \\ ع \end{pmatrix}$ ونقرأ الشعاع $\overleftarrow{من}$ ، مركبته الأولى س ومركبته الثانية ع .



مثال : أ نقطة من المستوي المزود بالمعلم(م، $\overleftarrow{و}$ ، $\overleftarrow{ى}$) الشكل يبين أن إحداثيي النقطة أ هما 3 ، 4 .

مركبتا الشعاع $\overleftarrow{مأ}$ أيضا 3، 4 . نكتب :

$$\overleftarrow{مأ} = 3\,\overleftarrow{و} + 4\,\overleftarrow{ى}$$

إذن أ (3 ، 4) ، $\overleftarrow{مأ} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

. يمكن كتابة كل شعاع $\overleftarrow{ش} \begin{pmatrix} س \\ ع \end{pmatrix}$ على الشكل :

$$\overleftarrow{ش} = س\,\overleftarrow{و} + ع\,\overleftarrow{ى}$$

تسمى الثنائية ($\overleftarrow{و}$ ، $\overleftarrow{ى}$) أساسا للمستوي .

. تساوي شعاعين :

ليكن : $\overrightarrow{ش} \begin{pmatrix} س \\ ع \end{pmatrix}$ ، $\overrightarrow{ش'} \begin{pmatrix} س' \\ ع' \end{pmatrix}$

لدينا $\overrightarrow{ش} = \overrightarrow{ش'} \Leftrightarrow$ (س = س') وَ (ع = ع')

$\overrightarrow{ش} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow$ (س = 0) وَ (ع = 0)

3) مركبتا شعاع $\overrightarrow{أب}$

(م ، $\overrightarrow{و}$ ، $\overrightarrow{ي}$) معلم للمستوي . بفرض $\overrightarrow{أب} \begin{pmatrix} س \\ ع \end{pmatrix}$. لنعبر عن س ، ع بدلالة إحداثيات النقطتين أ وَ ب

لدينا :

$\overrightarrow{أب} = \overrightarrow{أم} + \overrightarrow{مب}$

$\overrightarrow{أب} = \overrightarrow{مب} - \overrightarrow{مأ}$

س $\overrightarrow{و}$ + ع $\overrightarrow{ى}$ = ($س_ب$ $\overrightarrow{و}$ + $ع_ب$ $\overrightarrow{ى}$) − ($س_أ$ $\overrightarrow{و}$ + $ع_أ$ $\overrightarrow{ى}$)

= ($س_ب$ − $س_أ$) $\overrightarrow{و}$ + ($ع_ب$ − $ع_أ$) $\overrightarrow{ى}$

من هذه المساواة الشعاعية ينتج :

س = $س_ب$ − $س_أ$ وَ ع = $ع_ب$ − $ع_أ$

أي : $\overrightarrow{أب} \begin{pmatrix} س_ب - س_أ \\ ع_ب - ع_أ \end{pmatrix}$

4) نتائج :

المستوي منسوب إلى معلم $(م؛ \vec{و} ، \vec{ى})$

. بفرض $\vec{ش}\begin{pmatrix}س\\ ع\end{pmatrix}$ ، $\vec{ش'}\begin{pmatrix}س'\\ ع'\end{pmatrix}$ ، $\alpha \ni ح$.

مركبتا $(\vec{ش} + \vec{ش'})$	هما	$\begin{pmatrix}س + س'\\ ع + ع'\end{pmatrix}$
مركبتا $\alpha\,\vec{ش}$	هما	$\begin{pmatrix}\alpha س\\ \alpha ع\end{pmatrix}$

. بفرض أ (س ، ع) ، ب (سَ ، عَ) نقطتان من المستوي

أحداثيا النقطة هـ منتصف القطعة [أ ب]	هما	$\left(\frac{س + س'}{2} ، \frac{ع + ع'}{2}\right)$
المسافة بين أ و ب	هي	$أ ب = \sqrt{(س - س')^2 + (ع - ع')^2}$

5) شرط توازي شعاعين

$\vec{ش}\begin{pmatrix}س\\ ع\end{pmatrix}$ وَ $\vec{ش'}\begin{pmatrix}س'\\ ع'\end{pmatrix}$ شعاعان غير معدومين ، لنبحث عن شرط توازيهما .

لدينا : $\vec{ش} \,//\, \vec{ش'} \Leftrightarrow E\,\alpha \ni ح : \vec{ش} = \alpha\,\vec{ش'}$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}س\\ ع\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha س'\\ \alpha ع'\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{س} = \alpha\,\text{س}' \\ \text{ع} = \alpha\,\text{ع}' \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\text{س}}{\text{س}'} = \frac{\text{ع}}{\text{ع}'}$$

$$\vec{\text{ش}} \,//\, \vec{\text{ش}}' \Leftrightarrow \text{س}\,\text{ع}' - \text{ع}\,\text{س}' = 0$$

العدد الحقيقي س ع' - س' ع يسمى محدد الشعاعين $\vec{\text{ش}}$ و $\vec{\text{ش}}'$ ونكتب :

محدد $\vec{\text{ش}}$ و $\vec{\text{ش}}'$ $= \begin{vmatrix} \text{س} & \text{س}' \\ \text{ع} & \text{ع}' \end{vmatrix}$

ومنه : $\vec{\text{ش}} \,//\, \vec{\text{ش}}' \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \text{س} & \text{س}' \\ \text{ع} & \text{ع}' \end{vmatrix} = 0$

3 . تطبيقات

في كل ما يأتي نعتبر أن المستوي مزود بمعلم متعامد متجانس (م ، $\vec{\text{و}}$ ، $\vec{\text{ي}}$).

1) المعادلة الديكارتية لمستقيم

. شعاع توجيه مستقيم .

كل شعاع غير معدوم منحاه المستقيم (ق) يسمى شعاع توجيه (ق)

. إنشاء مستقيم معين بنقطة وشعاع توجيه

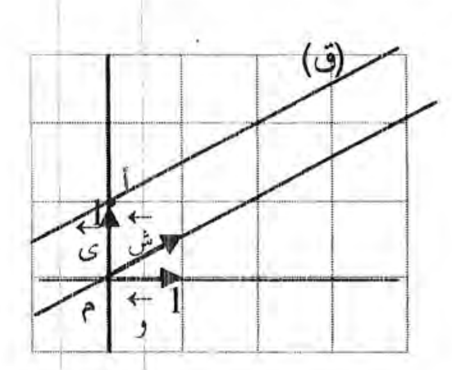
لإنشاء المستقيم (ق) الذي يشمل

النقطة أ وشعاع توجيهه $\vec{\text{ش}}$ حيث

أ (0 ، 1) و $\vec{\text{ش}} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$:

- ننشئ النقطة أ والشعاع $\vec{\text{ش}}$.
- ننشئ المستقيم الذي يشمل أ
- ويوازي حامل $\vec{\text{ش}}$.

(الشكل) : .



. معادلة مستقيم معين بنقطة وشعاع توجيه

لتكن النقطة أ (1 ، 4) والشعاع $\vec{ش}$ $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

ولنبحث عن معادلة المستقيم الذي يشمل أ و شعاع توجيهه $\vec{ش}$.

. معادلة ق (أ ، $\vec{ش}$)

لتكن ن (س ، ع) نقطة من المستوي .

لدينا :

$\vec{ش}$ $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{أن}$ $\begin{pmatrix} س-1 \\ ع-4 \end{pmatrix}$

ن ∋ (ق) ⟺ $\overrightarrow{أن}$ // $\vec{ش}$

⟺ محدد $\overrightarrow{أن}$ و $\vec{ش}$ = 0

⟺ $\begin{vmatrix} س-1 & 2 \\ ع-4 & -3 \end{vmatrix} = 0$

⟺ (-3) (س-1) – 2 (ع – 4) = 0

⟺ - 3 س + 3 – 2 ع + 8 = 0

⟺ 3 س + 2 ع – 11 = 0 .... (1)

المساواة (1) التي تربط بين إحداثيي كل نقطة ن (س ، ع) من (ق) تسمى معادلة ديكارتية للمستقيم (ق) . نكتب :

(ق) : 3 س + 2 ع – 11 = 0

وبصفة عامة

أ ، ب ، جـ أعداد حقيقية :
كل معادلة من الشكل : أ س + ب ع + جـ = 0
حيث أ ، ب غير معدومين معا هي معادلة ديكارتية لمستقيم شعاع توجيهه هو
$\vec{ش}$ $\begin{pmatrix} -ب \\ أ \end{pmatrix}$

• **معادلة مستقيم معين بنقطتين :**

لنعين معادلة للمستقيم (أ ب) حيث أ (1 ، 2) ، ب (- 4 ، 0) .

الشعاع $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ هو شعاع توجيه للمستقيم (أ ب) .

فالمستقيم (أ ب) معين بشعاع التوجيه $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ والنقطة أ (1 ، 2) مثلا .

لدينا : $\overleftarrow{\text{أ ب}} \begin{pmatrix} 1- & 4- \\ 2- & 0 \end{pmatrix}$ أي : $\overleftarrow{\text{أ ب}} \begin{pmatrix} 5- \\ 2- \end{pmatrix}$ أ (1 ، 2)

لتكن ن (س ، ع) نقطة من المستوي .

$$\overleftarrow{\text{أ ن}} \begin{pmatrix} 1-\text{س} \\ 2-\text{ع} \end{pmatrix}$$

ن ∈ (أ ب) ⟺ $\overleftarrow{\text{أ ن}} \,//\, \overleftarrow{\text{أ ب}}$

⟺ محدد [$\overleftarrow{\text{أ ن}}$ ، $\overleftarrow{\text{أ ب}}$] = 0

⟺ $\begin{vmatrix} 1-\text{س} & 5- \\ 2-\text{ع} & 2- \end{vmatrix} = 0$

⟺ (- 2) (س – 1) – (- 5) (ع – 2) = 0

⟺ - 2 س + 2 + 5 ع – 10 = 0

⟺ - 2 س + 5 ع – 8 = 0

⟺ 2 س – 5 ع + 8 = 0

ومنه : (أ ب) : 2 س – 5 ع + 8 = 0......... (1)

هي معادلة ديكارتية للمستقيم (أ ب)

• **المعادلة المختصرة للمستقيم (أ ب) :**

لنعبر عن ع بدلالة س :

لدينا :

(1) ⟺ ع = $\frac{2}{5}$س + $\frac{8}{5}$ ...... (2)

المعادلة (2) هي من الشكل :

ع = أ س + ب

وتسمى المعادلة المختصرة للمستقيم (أ ب)

يسمى العدد أ معامل توجيه المستقيم (أ ب) .

2) شرط توازي مستقيمين

. يتوازى مستقيمان إذا وفقط إذا كان شعاعا توجيهيهما متوازيين

مثال 1 : ليكن : (ق) : س – 3 ع + 2 = 0

(قَ) : 2 س – 6 ع + 4 = 0

شعاع توجيه (ق) هو $\overleftarrow{ش}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$

شعاع توجيه (قَ) هو $\overleftarrow{شَ}\begin{pmatrix}6\\2\end{pmatrix}$

لدينا :

محدد $\overleftarrow{ش}$ و $\overleftarrow{شَ}$ = $\begin{vmatrix}3 & 6\\1 & 2\end{vmatrix}$ = 0

إذن $\overleftarrow{ش}$ // $\overleftarrow{شَ}$ وبالتالي : (ق) // (قَ)

مثال 2

ليكن : (ق) : 3 س + 2 ع – 1 = 0

(قَ) : 4 س – 5 ع + 2 = 0

شعاع توجيه (ق) هو $\overleftarrow{ش}\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$

وشعاع توجيه (قَ) هو $\overleftarrow{شَ}\begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix}$

لدينا : $\begin{vmatrix} 5 & 2- \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 4 \times (-2) - (5 \times 3) = -23 \neq 0$

إذن : $\overrightarrow{ش}$ وَ $\overrightarrow{شَ}$ غير متوازيين وبالتالي (ق) وَ (قَ) غير متوازيين .

4 . تمرين محلول

(م، $\overrightarrow{و}$ ، $\overrightarrow{ى}$) معلم للمستوي

نعتبر النقط أ (- 2 ، 2) ، ب (- 1 ، 5) ، جـ (5 ، 3) .

1. عيّن الأطوال : أ ب ، أ جـ ، ب جـ .

2. عيّن النقطة ن بحيث : $\overrightarrow{م ن} = \overrightarrow{أ ب} + \overrightarrow{أ جـ} - \frac{1}{2}\overrightarrow{ب جـ}$

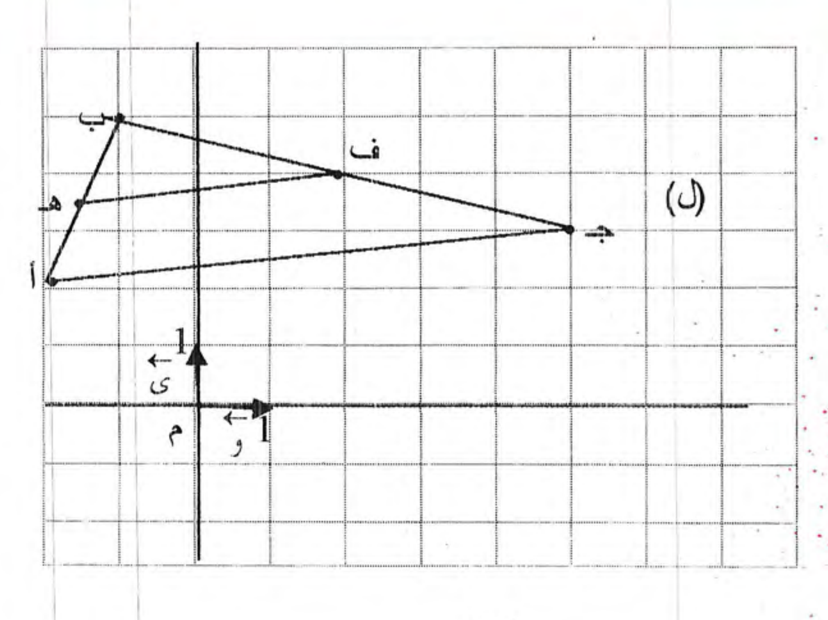
3. لتكن هـ ، ف منتصفي [أ ب] و [ب جـ] .

بين أن الشعاعين $\overrightarrow{هـ ف}$ و $\overrightarrow{أ جـ}$ متوازيان .

4. عين معادلة ديكارتية للمستقيم (ل) الذي يشمل النقطة أ وَ شعاع توجيه $\overrightarrow{هـ ف}$.

هل النقطة جـ تنتمي إلى (ل) ؟

الحل :



1. تعيين الأطوال أب ، أجـ ، ب جـ :

. الطول أ ب :

أ ب = $\sqrt{(-1+2)^2 + (5-2)^2}$

أ ب = $\sqrt{10}$

. الطول أ جـ :

أ جـ = $\sqrt{(5+2)^2 + (3-2)^2}$

= $\sqrt{50}$

أ جـ = $5\sqrt{2}$

. الطول ب جـ :

ب جـ = $\sqrt{(5+1)^2 + (3-5)^2}$

= $\sqrt{40}$

ب جـ = $2\sqrt{10}$

2. تعيين النقطة ن :

لدينا : $\overrightarrow{\text{أب}} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ ، $\overrightarrow{\text{أجـ}} \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}$ ، $\overrightarrow{\text{ب جـ}} \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix}$ ، $\frac{1}{2}\overrightarrow{\text{ب جـ}} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{\text{م ن}} = \overrightarrow{\text{أب}} + \overrightarrow{\text{أجـ}} - \frac{1}{2}\overrightarrow{\text{ب جـ}}$

$= (1\,\vec{\text{و}} + 3\,\vec{\text{ى}}) + (7\,\vec{\text{و}} + 1\,\vec{\text{ى}}) - (3\,\vec{\text{و}} - 1\,\vec{\text{ى}})$

$= (1 + 7 - 3)\,\vec{\text{و}} + (3 + 1 + 1)\,\vec{\text{ى}}$

$\overrightarrow{\text{م ن}} = 5\,\vec{\text{و}} + 5\,\vec{\text{ى}}$

فالنقطة ن هي : ن (5 ، 5)

3 . توازي الشعاعين $\overrightarrow{\text{هـ ف}}$ و $\overrightarrow{\text{أجـ}}$

هـ هي منتصف [أ ب] ⟸ هـ ($\frac{-2-1}{2}$ ، $\frac{2+5}{2}$)

⟸ هـ ($-\frac{3}{2}$ ، $\frac{7}{2}$)

ف منتصف [ب جـ] ⟺ ف $\left(\frac{5+1-}{2} ، \frac{3+5}{2} \right)$

⟺ ف $(2 ، 4)$

ومنه : $\overrightarrow{\text{هـف}} \begin{pmatrix} 2+ & \frac{3}{2} \\ -4 & \frac{7}{2} \end{pmatrix}$ أي $\overrightarrow{\text{هـف}} \begin{pmatrix} \frac{7}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ و $\overrightarrow{\text{أجـ}} \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}$

محدد $[\overrightarrow{\text{هـف}} ، \overrightarrow{\text{أجـ}}] = \begin{vmatrix} \frac{7}{2} & 7 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} = \frac{7}{2} \times 1 - \frac{7}{2} = 0$

إذن : $\overrightarrow{\text{هـف}} \,//\, \overrightarrow{\text{أجـ}}$

4. إيجاد معادلة ديكارتية للمستقيم (ل)

المستقيم (ل) معين بالنقطة أ (- 2 ، 2) وشعاع التوجيه $\overrightarrow{\text{هـف}} \begin{pmatrix} \frac{7}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

لتكن ن (س ، ع) نقطة من المستوي :
لدينا :

أ (- 2 ، 2) ، $\overrightarrow{\text{أن}} \begin{pmatrix} \text{س} + 2 \\ \text{ع} - 2 \end{pmatrix}$

ن ∈ (ل) ⟺ $\overrightarrow{\text{أن}} \,//\, \overrightarrow{\text{هـف}}$

⟺ $\begin{vmatrix} \text{س} + 2 & \frac{7}{2} \\ \text{ع} - 2 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = 0$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}(س + 2) - \frac{7}{2}(ع - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad س - 7ع + 16 = 0$$

ومنه :

$$(ل) : \quad س - 7ع + 16 = 0$$

. هل جـ (5 ، 3) ينتمي إلى (ل) ؟

جـ ∈ (ل) ⇔ (5 ، 3) تحقق معادلة (ل) .

بتعويض الثنائية (س ، ع) بالثنائية (5 ، 3) نجد :

$$5 - (7 \times 3) + 16 = 21 - 21 = 0$$

إذن الثنائية (5 ، 3) تحقق معادلة (ل)

وبالتالي : جـ ∈ (ل)

تمـاريـــن

. النقط والأشعة

1. (م، $\overleftarrow{و}$ ، $\overleftarrow{ى}$) معلم متعامد متجانس للمستوي ، محوراه (سَ س ، $\overleftarrow{و}$) وَ (عَ ع ، $\overleftarrow{ى}$) .

عيّن نظائر النقط : أ (- 1 ، $\frac{2}{3}$) ، ب (2,5 ، - $\frac{3}{4}$) ، جـ (0 ، - $\frac{5}{2}$) ، د (3,5 ، 0) بالنسبة إلى كل من (سَ س) و (عَ ع) .

2. (م، $\overleftarrow{و}$ ، $\overleftarrow{ى}$) معلم متعامد متجانس للمستوي .

نعتبر النقط : أ (- 2 ، 1) ، ب (1 ، 2) ، جـ (- 2 ، 1) ، د (- 1 ، - 2)

. برهن أن الرباعي أ ب جـ د متوازي أضلاع

3. (م، $\overleftarrow{و}$ ، $\overleftarrow{ى}$) معلم متعامد متجانس للمستوي

نعتبر النقط التالية : أ (2 ، 4) ، ب (5 ، 0) ، جـ (- 3 ، - 6) ، د (- 5 ، 4) .

1) علّم هذه النقط

2) عيّن إحداثيات منتصفات القطع [أ ب] ، [جـ د] ، [د ب]

3) عيّن المركبات السلمية للأشعة : $\overleftarrow{أ جـ}$ ، $\overleftarrow{د أ}$ ، $\overleftarrow{ب جـ}$

4) عيّن المسافات : أ ب ، ب جـ ، د أ ، أ جـ .

4. المستوي منسوب إلى معلم متعامد متجانس (م، $\overleftarrow{و}$ ، $\overleftarrow{ى}$) .

أ ، ب ، جـ نقاط من المستوي حيث :

أ (- 2 ، 3) ، ب (1 ، 4) ، جـ (4 ، - 5) .

عيّن س وَ ع إحداثيي النقطة ن في كلّ من الحالات التالية

1) $\overleftarrow{ب ن}$ = $\overleftarrow{أ ب}$

2) ن منتصف القطعة [أ جـ]

3) $2\overleftarrow{أب} + 3\overleftarrow{جـن} = \overleftarrow{0}$

4) أ ب جـ ن متوازي أضلاع .

5) $\overleftarrow{بن} = \frac{1}{2}(\overleftarrow{بأ} + \overleftarrow{بجـ})$

6) ن هي نظيرة جـ بالنسبة إلى ب .

5. (م، $\overleftarrow{و}$ ، $\overleftarrow{ى}$) معلم متعامد متجانس للمستوي :

لتكن النقط أ (0 ، 3) ، ب (9 ، - 3) جـ (- 3 ، 5) ، د (7 ، - $\frac{3}{2}$)

هـ (- 1 ، $\frac{11}{3}$)

1) هل الشعاعان $\overleftarrow{أب}$ و $\overleftarrow{أجـ}$ متوازيان ؟

2) هل النقط أ ، ب ، جـ على استقامة واحدة ؟

3) هل النقط أ ، ب ، د على استقامة واحدة ؟

4) هل النقط ب ، جـ ، هـ على استقامة واحدة ؟

6. (م، $\overleftarrow{و}$ ، $\overleftarrow{ى}$) معلم متعامد متجانس للمستوي .

نعتبر النقط : أ (0 ، - 3) ، ب (2 ، 3) ، جـ (6 ، 2) ، د (- 1 ، 1)

1) عيّن إحداثيات النقطتين هـ ، ف بحيث يكون :

. $\overleftarrow{بهـ} = \frac{1}{2}\overleftarrow{أب}$

. $\overleftarrow{أف} = 3\overleftarrow{أد}$

2) عيّن مركبات الشعاعين $\overleftarrow{جـهـ}$ و $\overleftarrow{جـف}$.

3) أثبت أن النقط جـ ، هـ ، ف على استقامة واحدة .

7. (م، $\overleftarrow{و}$ ، $\overleftarrow{ى}$) معلم متعامد متجانس للمستوي . أ ، ب ، جـ ، د نقاط من المستوي حيث : أ (- 2 ، 1) ، ب (3 ، 3) ، جـ (0 ، - 1)

د (- 5 ، - 3)

1) عيّن إحداثيي النقطة هـ نظيرة جـ بالنسبة إلى د .

2) عيّن إحداثيي النقطة ث بحيث : $\overleftarrow{ثأ} + \overleftarrow{ثهـ} + \overleftarrow{ثد} = \overleftarrow{0}$

3) عيّن مركبات الشعاعين $\overleftarrow{هـث}$ ، $\overleftarrow{هـب}$.

4) أثبت أن النقط هـ ، ث ، ب على استقامة واحدة .

8. أ ، ب ، جـ ثلاث نقط من مستو منسوب إلى معلم متعامد متجانس(م، $\overleftarrow{و}$ ، $\overleftarrow{ى}$)
احسب ، في كل من الحالات الآتية الأطوال أ ب ، ب جـ ، أ جـ ثم تحقق أن أ ب جـ مثلث قائم ، عيّن الزاوية القائمة .

1) أ (2 ، 5) ، ب (5 ، 3) ، جـ (1 ، - 3)

2) أ (0 ، 6) ، ب (8 ، 0) ، جـ (7 ، - 1)

3) أ ($-\frac{3}{2}$ ، - 2) ، ب (3 ، 4) ، جـ ($\frac{9}{2}$ ، $-\frac{13}{2}$)

. معادلة مستقيم

9. (م، $\overleftarrow{و}$ ، $\overleftarrow{ى}$) معلم متعامد متجانس للمستوي .

ارسم المستقيم (ق) المعين بالنقطة أ و شعاع التوجيه $\overleftarrow{ش}$ في كل من الحالات التالية :

1) أ (0 ، 5) ، $\overleftarrow{ش}\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$

2) أ (1 ، - 2) ، $\overleftarrow{ش}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$

3) أ (1 ، 4) ، $\overleftarrow{ش}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$

10 (م، $\overleftarrow{و}$ ، $\overleftarrow{ى}$) معلم متعامد متجانس للمستوي .

أوجد معادلة ديكارتية للمستقيم المعين بالنقطة أ و شعاع التوجيه $\overleftarrow{ش}$ في كل من الحالات التالية .

1) أ (1 ، - 2) ، ش⃗ $\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix}$

2) أ (4 ، 3) ، ش⃗ $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

3) أ (3 ، 0) ، ش⃗ $\begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

4) أ (0 ، 1) ، ش⃗ $\begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ 2 \end{pmatrix}$

5) أ (- 1 ، - 7) ، ش⃗ $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 4 \end{pmatrix}$

11 في معلم متعامد متجانس للمستوي (م، و⃗ ، ى⃗) نعتبر النقط :
أ (6 ، 1) ، ب (3 ، 4) ، جـ (1 ، 6) ، د (- 2 ، 1)
أوجد معادلة ديكارتية لكل من المستقيمات (أ ب) ، (أ جـ) ، (د جـ)
(د ب) ، (ب جـ) ، (م أ) ، (م جـ) .

12 (م، و⃗ ، ى⃗) معلم متعامد متجانس للمستوي . (ق$_1$) ، (ق$_2$) ، (ق$_3$)
مستقيمات معادلاتها الديكارتية :
(ق$_1$) : س – 3 ع + 25 = 0
(ق$_2$) : 3 س – 4 ع = 11
(ق$_3$) : 3 س + 4 ع – 19 = 0

1) عيّن ش⃗$_1$ ، ش⃗$_2$ ، ش⃗$_3$ أشعة توجيه المستقيمات
(ق$_1$) ،(ق$_2$) ، (ق$_3$) على الترتيب .

2) عيّن معادلة مختصرة ، ثم معامل التوجيه لكل من (ق$_1$)،(ق$_2$)،(ق$_3$).

13 (م، و⃗ ، ى⃗) معلم متعامد متجانس للمستوي .
هل النقطة أ تنتمي إلى المستقيم (ق) في كل من الحالات التالية ؟

1) أ (5 ، 3) و (ق) : ع = $-\frac{1}{6}$ س + 4

2) أ (- 2 ، 3) و (ق) : 11 س + 2 ع + 15 = 0

3) أ ($\frac{1}{3}$ ، $\frac{13}{6}$) و (ق) : - 4 س + 2 ع - 3 = 0

14 (م، $\overleftarrow{و}$ ، $\overleftarrow{ى}$) معلم متعامد متجانس للمستوي ، (ق) مستقيم معادلته

3 س + 4 ع − 2 = 0

1) عيّن $\overleftarrow{ش}$ شعاع توجيه المستقيم (ق) .

2) عيّن المعادلة المختصرة ومعامل توجيه (ق) .

3) عيّن إحداثيات أ و ب نقطتي تقاطع (ق) مع محور التراتيب و محور الفواصل

4) عيّن ترتيب النقطة جـ من (ق) التي فاصلتها $2\sqrt{3}$.

5) عيّن α بحيث تنتمي النقطة د (α ، $-\frac{3}{7}$) إلى (ق) .

1 . أنشطة تمهيدية

نشاط 1 :

تا و ها دالتان معرفتان في ح كما يلي :

س ⟼ تا (س) = $-\frac{3}{5}$ س ؛ س ⟼ ها (س) = 2 س^2 - 1

1) . قارن بين كل من : تا (- 1) و تا (1) ثم تا (- 5) و تا (5)

. تحقق أنه من أجل س$_0$ ∋ ح : تا (- س$_0$) = - تا (س$_0$)

2) . قارن بين كل من : ها (2) و ها (- 2) ثم ها ($\frac{1}{2}$) و ها (- $\frac{1}{2}$)

. تحقق أنه من أجل س$_0$ ∋ ح : ها (- س$_0$) = ها (س$_0$)

نشاط 2 .

تا دالة معرفة في ح كما يلي :

س ⟼ تا (س) = س^2 + س + 1

. قارن بين تا (- 1) و تا (1) ثم بين تا ($\frac{1}{2}$) و تا (- $\frac{1}{2}$) .

. احسب تا (- س) ثم قارن بين تا (- س) و تا (س) .

. أدرس إشارة الجداء س (س + 1)

. كيف نختار س حتى يكون : تا (س) > 1 ؟

نشاط 3 :

1) لتكن الدالة تا المعرفة في ح : س ⟼ تا (س) = 2 س – 1

. أتمم الجدول التالي :

س	-3	- $\frac{5}{2}$	-2	0	1	$\frac{3}{2}$	5
ع = تا(س)	......	......	.....	.....	.....	......	.....

. رتب قيم المتغير س باستعمال الرمز " < " .
. رتب قيم الصور ع باستعمال الرمز " < " .
لاحظ أنه عندما يأخذ المتغير س قيما" متزايدة فإن الصور ع تأخذ قيما" متزايدة نقول عندئذ إن الدالة تا متزايدة.

2) لتكن الدالة تا المعرفة في ح* : س ⟼ ها (س) = $\frac{2}{س}$

. أتمم الجدول التالي :

س	3-	2-	1-	1	2	5
ع = ها(س)	...	...	...	...	...	...

لاحظ أنه عندما يأخذ المتغير س قيما متزايدة فإن الصورة ع تأخذ قيما" متناقصة نقول عندئذ إن الدالة ها متناقصة .

2 . عموميات على الدوال العددية لمتغير حقيقي

1) تعريف

كل دالة لمجموعة الأعداد الحقيقية في نفسها تسمى دالة عددية لمتغير حقيقي

. نعني من الآن فصاعدا بكلمة دالة الدالة العددية لمتغير حقيقي ، ونرمز إليها عادة برمز مثل : تا ، حا ، ها ، .....ونعبر عنها بكتابة مثل :

تا : ح ⟵ ح
س ⟼ ع = تا (س)

. س هو متغير الدالة تا
. تا (س) هي صورة س بالدالة تا
. مجموعة تعريف الدالة تا هي مجموعة العناصر س من ح التي لكل منهما صورة بالدالة تا .

أمثلة :

1) الدالة تا: ح ⟵ ح
س ⟼ 2س + 1

هي دالة معرفة في ح ، ومجموعة تعريفها هي :
ف$_{تا}$ =] - ∞ ، + ∞ [

2) الدالة ها : ح ⟵ ح
س ⟼ 5 س^2

هي دالة معرفة في ح ومجموعة تعريفها هي :
ف$_{ها}$ =] - ∞ ، + ∞ [

3) الدالة حا : ح ⟵ ح
س ⟼ $\frac{2}{س}$

هي دالة معرفة في ح* ومجموعة تعريفها هي :
ف$_{حا}$ =] - ∞ ، 0 [∪] 0 ، + ∞ [

2. اتجاه تغيرات دالة

1) نسبة تزايد دالة

تا دالة معرفة في مجال ف
س$_1$ و س$_2$ قيمتان مختلفتان من ف
النسبة $\frac{تا(س_2) - تا(س_1)}{س_2 - س_1}$ تسمى نسبة تزايد الدالة تا في المجال ف

مثال 1 :

لتكن الدالة تا حيث :
تا : ح ⟵ ح
س ⟼ 2س + 1

وليكن س$_1$ ، س$_2$ عنصرين مختلفين من المجال] 2 ، 3 [
نسبة تزايد تا في هذا المجال هي :

$$\frac{تا(س_2) - تا(س_1)}{س_2 - س_1} = \frac{(2س_2+1) - (2س_1+1)}{س_2 - س_1} = \frac{2(س_2 - س_1)}{س_2 - س_1} = 2$$

مثال 2 :

$$حا : ح \longrightarrow ح$$
$$س \longmapsto -س^2$$

ليكن $س_1$ ، $س_2$ عنصرين مختلفين من المجال [1 ، 2] نسبة تزايد حا في هذا المجال هي :

$$\frac{حا(س_2) - حا(س_1)}{س_2 - س_1} = \frac{(-س_2^2) - (-س_1^2)}{س_2 - س_1}$$

$$= \frac{-(س_2^2 - س_1^2)}{س_2 - س_1}$$

$$= \frac{-(س_2 + س_1)(س_2 - س_1)}{س_2 - س_1}$$

$$= -(س_2 + س_1)$$

2) اتجاه تغير دالة عددية في مجال

- **تعريف**

تا دالة معرفة في مجال ف
$س_1$ ، $س_2$ عنصران مختلفان من ف ،
. تا متزايدة في المجال ف معناه $\frac{تا(س_2) - تا(س_1)}{س_2 - س_1} > 0$
. تا متناقصة في المجال ف معناه $\frac{تا(س_2) - تا(س_1)}{س_2 - س_1} < 0$
. تا ثابتة في المجال ف معناه $\frac{تا(س_2) - تا(س_1)}{س_2 - س_1} = 0$

ملاحظة :

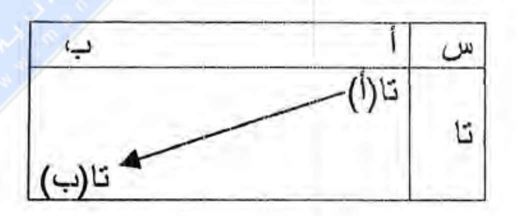
حسب النشاط 3 . والتمرين السابق يمكن القول بأن :
. تا متزايدة في مجال ف معناه : الصور تتغير بنفس اتجاه تغير سوابقها .
. تا متناقصة في مجال ف معناه : الصور تتغير بعكس اتجاه تغير سوابقها .
. تا ثابتة في مجال ف معناه : إذا تغيرت السوابق في المجال ف فإن صورها لا تتغير .

3) جدول تغيرات دالة في مجال [أ ، ب] .

. دراسة تغيرات دالة تا معرفة في مجال ف معناها تعيين المجالات من ف التي تكون الدالة تا في كل منها إما متزايدة وإما متناقصة وإما ثابتة .
تسجل نتائج هذه الدراسة في جدول يسمى جدول تغيرات تا

س	أ	ب
تا	تا(أ)	تا(ب)

تا متزايدة في المجال [أ ، ب]



تا متناقصة في المجال [أ ، ب]

3 . التمثيل البياني لدالة

ينسب المستوي إلى معلم (م ، $\overleftarrow{و}$ ، $\overleftarrow{ي}$)

1) تعريف

> تا دالة معرفة على مجموعة ف
> التمثيل البياني (ي) للدالة تا بالنسبة إلى المعلم (م ، $\overleftarrow{و}$ ، $\overleftarrow{ي}$) هو مجموعة النقط ن (س ، ع) من المستوي حيث :
> س ∋ ف و ع = تا (س) .

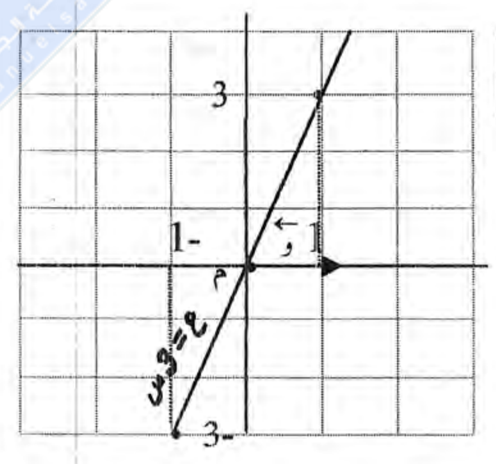
. المجموعة (ي) تسمى أيضا المنحني الممثل للدالة تا .
. المساواة ع = تا (س) تسمى معادلة المنحني (ي)
نكتب : (ي) : ع = تا (س) ونقرأ : المنحني (ي) الذي معادلته : ع = تا (س) .

مثال 1

المنحني البياني للدالة س ⟵ 3س
هو مجموعة النقط ن (س ، ع) حيث :
س ∋ ح و ع = 3 س أي المستقيم (ق) الذي معادلته ع = 3 س

الجدول التالي يتضمن إحداثيات بعض النقط من (ق)

س	1-	0	1
ع	3-	0	3



مثال 2 :

المنحني البياني (ك) للدالة س ⟵ $س^2$ هو مجموعة النقط ن (س ، ع)
حيث : س ∈ ح و ع = $س^2$.
الجدول التالي يتضمن إحداثيات بعض النقط من (ك) .

س	2-	1-	0	1	2
ع	4	1	0	1	4

لاحظ أن هذه الدالة متناقصة في المجال] -∞ ، 0] ومتزايدة في المجال [0 ، +∞ [.
نحصل على المنحنى (ك) في المجال [-2 ، 2] بوصل النقط (-2 ، 4)، (-1 ، 1) ، (0 ، 0) (1 ، 1) ، (2 ، 4) مع بعضها مراعين تغيرات الدالة .

2) الدوال الزوجية ، الدوال الفردية

. تعريف

تا دالة معرفة في مجموعة ف
نقول إن :
. تا زوجية إذا وفقط إذا : ∀ س ∈ ف: - س ∈ ف وَ تا (- س) = تا (س)
. تا فردية إذا وفقط إذا : ∀ س ∈ ف: - س ∈ ف وَ تا (- س) = - تا(س)

أمثلة :

1 – الدالة : س ⟼ $\frac{1}{|س|}$ المعرفة في ح* هي دالة زوجية لأن :

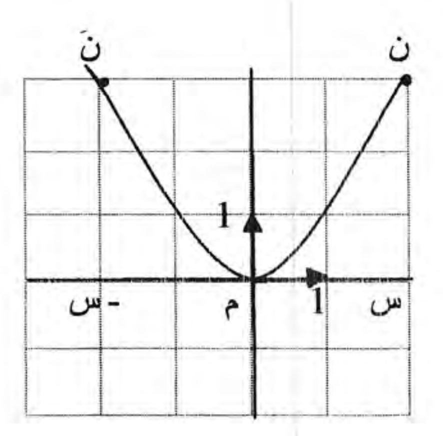
∀ س ∈ ح* ، - س ∈ ح* و $\frac{1}{|-س|} = \frac{1}{|س|}$ (|-س| = |س|)

2 – الدالة س ⟼ س^3 المعرفة في ح هي دالة فردية لأن :

∀ س ∈ ح : - س ∈ ح وَ (- س)^3 = - س^3

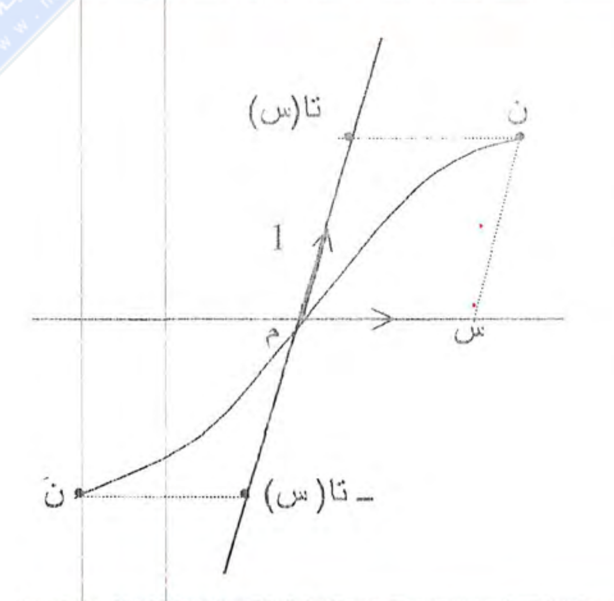
. التفسير الهندسي :

إذا كانت ن(س ، تا (س))
نقطة من المنحني (ل)
الممثل لدالة زوجية تا
فإن نَ (- س ، تا (س))
هي نقطة من (ل)
فإذا كان المحوران متعامدين
فإن ن و نَ متناظرتان
بالنسبة إلى محور التراتيب .



ومنه :

إذا كانت الدالة تا زوجية ، فإن ممثلها البياني (ل) بالنسبة إلى معلم متعامد (م ، $\overleftarrow{و}$ ، $\overleftarrow{ي}$) يقبل محور تناظر هو محور التراتيب .



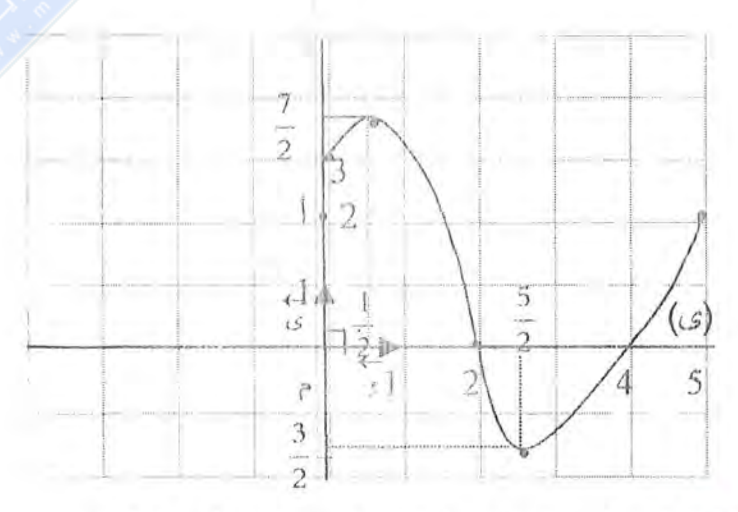
إذا كانت ن(س ، تا (س)) نقطة من المنحني (ل) الممثل لدالة فردية تا فإن نَ (ـ س ، ـ تا (س)) هي نقطة من (ل) . فالنقطتان ن و نَ متناظرتان بالنسبة مبدأ المعلم م .

ومنه :

إذا كانت الدالة تا فردية ، فإن ممثلها البياني (ل) بالنسبة إلى معلم كيفي (م ، $\overleftarrow{و}$ ، $\overleftarrow{ي}$) يقبل مركز تناظر هو المبدأ م .

4. تطبيق

الحل البياني لمعادلة بفرض (ى) التمثيل البياني للدالة تا (الشكل) ولنحل بيانيا" المعادلة : تا (س) = 2



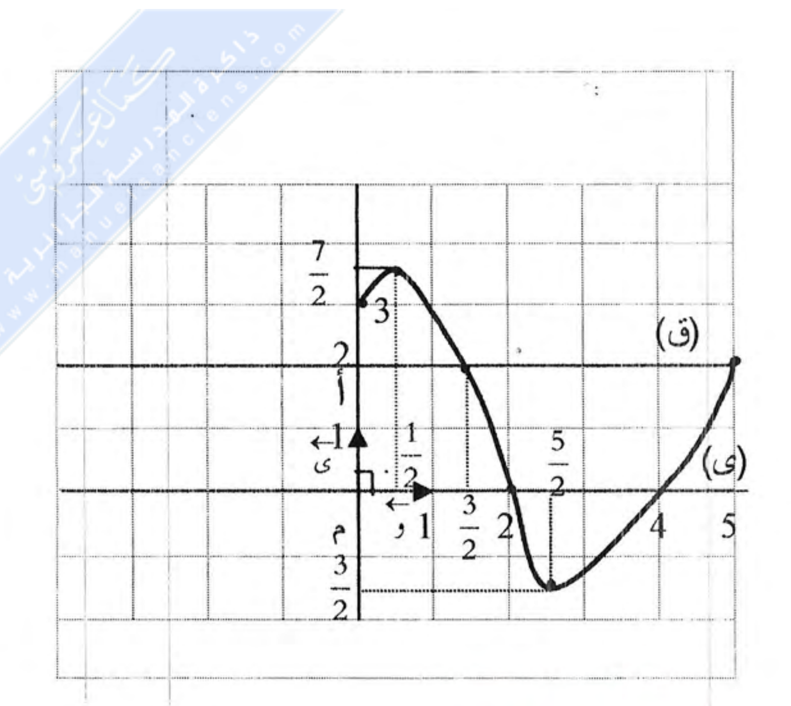
. تحليل المعطيات

الحل البياني للمعادلة تا (س) = 2 يعني أننا نبحث عن فواصل النقاط من المنحني (ى) التي تراتيبها 2 .

. الطريقة

- نحدد موقع العدد 2 على محور التراتيب وليكن أ ، ثم نرسم المستقيم الأفقي (ق) الذي يشمل أ .
- نقرأ فواصل نقاط تقاطع (ق) مع (ي) إن وجدت . فنحصل على مجموعة حلول هذه المعادلة وهي :

مج = { 1,5 ، 5 }



4 . تمرين محلول

تا دالة عددية معرفة كما يلي :

$$س \longmapsto تا(س) = \frac{2}{س}$$

و (ي) تمثيلها البياني بالنسبة إلى معلم متعامد متجانس (م ، $\overleftarrow{و}$ ، $\overleftarrow{ي}$)

1 . عين مجموعة تعريف تا .

2 . بين أن تا فردية .

3 . ادرس تغيرات الدالة تا من المجال] 0 ، + ∞ [.

4 . هل أ (- 2 ، - 1) ، ب (3 ، 2) هما نقطتان من المنحني (ي) الممثل للدالة تا ؟

الحل :

1 . لنعين مجموعة تعريف تا .

لدينا $تا(س) = \frac{2}{س}$

الكسر $\frac{2}{س}$ غير معين من أجل س = 0

فالدالة تا غير معرفة من أجل س = 0

إذن مجموعة تعريف تا هي ح*

أي :

ف~تا~ =] - ∞ ، 0 [∪] 0 ، + ∞ [

2 . لنبين أن تا فردية

لدينا :

$$تا (س) = \frac{2}{س}$$

و ∀ س ∈ ف~تا~ : - س ∈ ف~تا~ و تا (- س) = - $\frac{2}{س}$ = - تا (س)

إذن تا فردية

3 . لندرس تغيرات الدالة تا في المجال] 0 ، + ∞ [

ليكن $س_1$ ، $س_2$ عنصرين مختلفين من] 0 ، + ∞ [

لدينا :

$$\frac{تا(س_2) - تا(س_1)}{س_2 - س_1} = \frac{\frac{2}{س_2} - \frac{2}{س_1}}{س_2 - س_1}$$

$$= \frac{\frac{2(س_1 - س_2)}{س_2 س_1}}{س_2 - س_1}$$

$$= \frac{-2(س_2 - س_1)}{س_2 س_1 (س_2 - س_1)}$$

$$\frac{تا(س_2) - تا(س_1)}{س_2 - س_1} = - \frac{2}{س_1 س_2}$$ (لأن $س_1 \neq س_2$)

فنسبة تزايد تا سالبة لأن $س_1$ ، $س_2$ موجبان

وبالتالي : $\frac{تا(س_2) - تا(س_1)}{س_2 - س_1} < 0$

فالدالة تا متناقصة في المجال] 0 ، + ∞ [

4 . إحداثيا كل نقطة من المنحني (ي) هما (س ، تا (س))

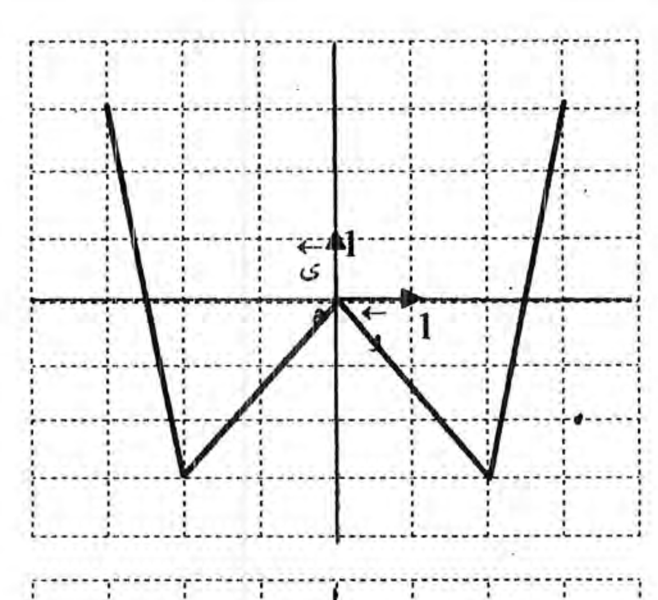
لدينا :

. تا (- 2) = $\frac{2}{-2}$ = - 1 إذن أ ∈ (ي)

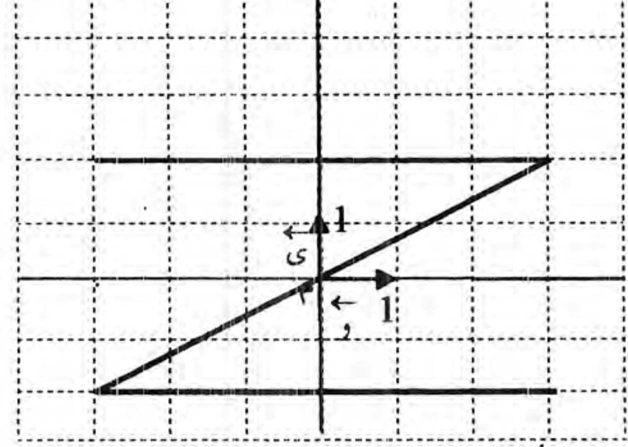
و تا (3) = $\frac{2}{3} \neq 2$ إذن ب ∉ (ي)

1. نعتبر الأشكال الآتية بالنسبة إلى معلم متعامد متجانس (م ، $\overleftarrow{و}$ ، $\overleftarrow{ي}$) :

الشكل (1)

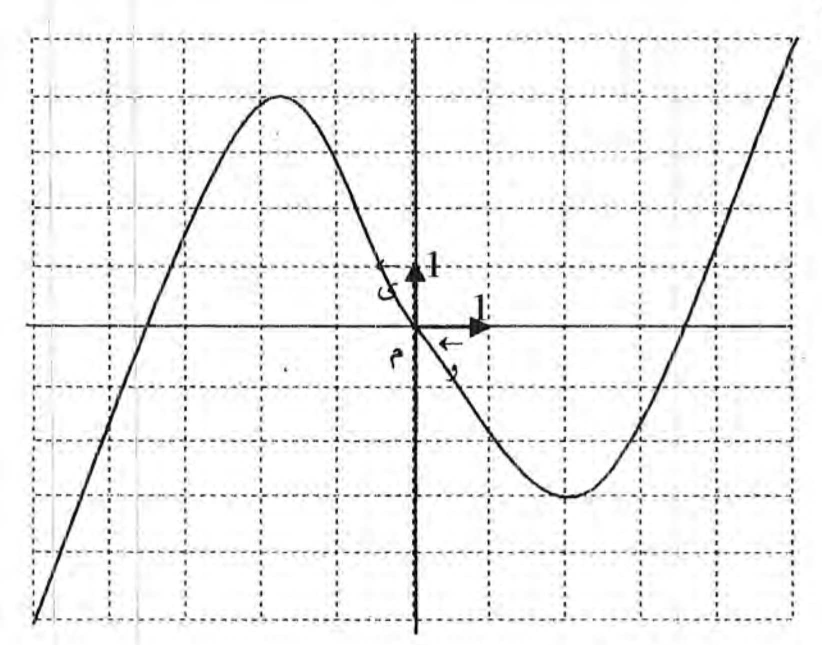


الشكل (2)



الشكل (3)

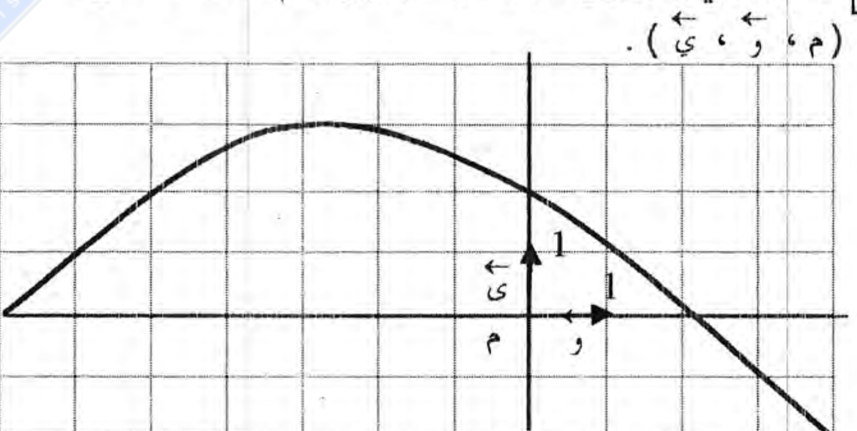
الشكل (4)



1) أي التمثيلات البيانية يمثل دالة ؟
2) أي التمثيلات يمثل دالة فردية ؟ و أيها يمثل دالة زوجية ؟

. التمثيل البياني لدالة :

2. الشكل الآتي يمثل بيان دالة تا ، بالنسبة إلى معلم متعامد متجانس (م ، و ، ي) .

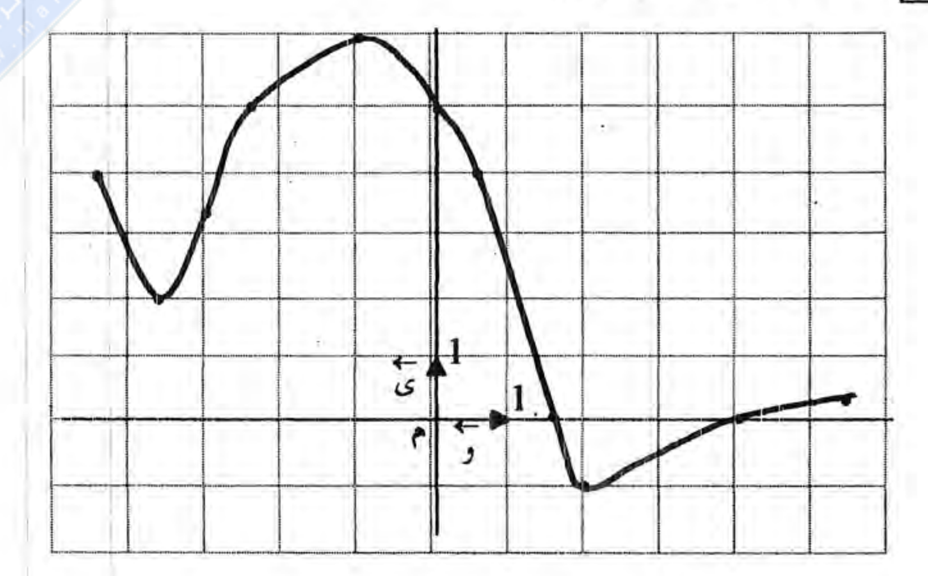


1 . حدد مجموعة تعريف تا
2 . ماهي صور – 3 ، 0 ، 2 بالدالة تا ؟
3 . شكل جدول تغيرات الدالة تا .

3. (ي) هو بيان دالة تا في معلم متعامد متجانس (م ، و ، ي) .
بقراءة لهذا البيان :

1 . عيّن مجموعة تعريف تا
2 . عيّن الصور : تا (2) ، تا (5) ، تا (0) ، تا (7) ، تا (- 4)
3 . عيّن سوابق العدد 3

4 . تا دالة ممثلها البياني (ي) .



1 . عيّن مجموعة تعريف تا
2 . حل بيانيا" المعادلات :

تا (س) = 5 ، تا (س) = 0 ، تا (س) = - 1

5 . عيّن مجموعة التعريف لكل من الدوال التالية

1) تا (س) = $\frac{1}{س^2 - 3}$ 2) تا (س) = $\frac{1}{|س|}$

3) تا (س) = $\frac{1}{|س| - 1}$ 4) تا (س) = $\sqrt{- س}$

5) تا (س) = $\frac{1}{\sqrt{س}}$ 6) تا (س) = $\frac{1}{(س - 1)(س - 2)}$

7) تا (س) = $\sqrt{س(س - 1)}$ 8) تا (س) = $\sqrt{س^2 - 4}$

6 . عيّن مجموعة تعريف الدالة ثم بيّن إن كانت زوجية أو فردية في كل حالة مما يلي :

1) تا (س) = س + $\frac{1}{س}$ 2) تا (س) = $\sqrt{1+س^2}$

3) تا(س) = $\frac{س}{س^2+1}$ ؛ 4) تا(س) = $\sqrt{|س|}$ ؛ 5) تا (س)= س $\sqrt{|س|}$

7 تا و ها دالتان معرفتان كما يلي :

تا : س ⟼ 2 $س^2$ و ها : س ⟼ - 3 $س^2$

1) عيّن مجموعة تعريف كل منهما .

2) ادرس تغيرات تا في المجال] - ∞ ، 0 [وتغيرات الدالة ها في المجال] 0 ، + ∞ [

8 تا و ها دالتان معرفتان كما يلي :

تا : س ⟼ - $\frac{1}{س}$ ؛ ها : س ⟼ $\frac{1}{2-س}$

1) عيّن مجموعة تعريف كل منهما .

2) بيّن أنّ :

- تا متزايدة في المجال] - ∞ ، - 1]
- ها متزايدة في المجال [0 ، 2 [

9 تا دالة معرفة كما يلي :

تا : س ⟼ $\sqrt{س}$

1) عيّن مجموعة تعريف تا

2) بيّن أن تا متزايدة في المجال [0 ، 1]

10 تا دالة معرفة كما يلي :

تا : س ⟼ 4 $س^2$ + 1

1) عيّن مجموعة تعريف تا

2) بيّن أن تا دالة زوجية

3) بيّن أن الدالة تا متزايدة في المجال] 2 ، 5] وأنها متناقصة في المجال [- 1 ، 0] .

19 الدالــة التآلفيــة

1. نشاط تمهيدي

لتكن الدالة العددية تا : س ⟼ 5 س-3 .

1. أحسب نسبة تزايد الدالة تا في ح ،
ماذا تستنتج ؟

2. مثل المستقيم (ق) : ع= 5 س-3 بالنسبة إلى معلم (م ، $\overleftarrow{و}$ ، $\overleftarrow{ى}$).

3. كيف تختار قيم المتغير س لكي يكون تا(س) > 10^6 ؟

4. كيف تختار قيم المتغير س لكي يكون تا(س) < -10^6 ؟

2. دراسة الدالة التآلفية : س ⟼ أ س + ب

1) تعريف

نسمي دالة تآلفية كل دالة عددية لمتغير حقيقي س معرفة كما يلي :
تا(س) = أ س + ب حيث أ ، ب عددان حقيقيان وَ أ ≠ 0

. حالات خاصة

- إذا كان ب = 0 نقول إن تا دالة خطية
- إذا كان أ = 0 تكون الدالة تا ثابتة

. أمثلة

- الدالة : س ⟼ 3 س – 8 هي دالة تآلفية
- الدالة : س ⟼ 2 س هي دالة خطية
- الدالة : س ⟼ 3 هي دالة ثابتة
- الدالة : س ⟼ $س^2$ ليست دالة تآلفية

2) – دراسة الدالة تا : س ⟼ 3 س – 8

. مجموعة التعريف

الدالة تا معرفة في ح .

ف =]- ∞ ، + ∞[

. اتجاه التغيير

من أجل كل عددين حقيقين مختلفين $س_1$ و $س_2$ لدينا :

$$\frac{تا(س_2) - تا(س_1)}{س_2 - س_1} = \frac{(3س_2 - 8) - (3س_1 - 8)}{س_2 - س_1} = 3$$

نسبة التزايد موجبة ، فالدالة تا متزايدة في ح

. دراسة الدالة تا عندما تأخذ |س| قيما" كبرى

الجدول التالي يتضمن بعض القيم الكبيرة للمتغير س وقيم تا (س) المناسبة

س	10	10^2	10^3	10^4	....
تا(س)	22	292	2992	29992	....

نلاحظ أن قيم تا (س) تكون كبيرة أكثر فأ كثر بقدر ما يكون س كبيرا" .

هل يمكن جعل تا (س) كبيرا" بالقدر الذي نريد ؟

أي هل يمكن جعل تا (س) أكبر من أي عدد معلوم α ؟

لدينا :

$$تا (س) > \alpha \Leftrightarrow 3س - 8 > \alpha$$

$$\Leftrightarrow س > \frac{\alpha + 8}{3}$$

ومنه لكي يكون تا (س) > α يكفي أن يكون س > $\frac{\alpha + 8}{3}$

فمثلا" لكي يكون تا (س) > 10^6 يكفي أن يكون س > $\frac{10^6 + 8}{3}$

نقول في هذه الحالة :

تا (س) يؤول إلى زائد لانهاية عندما يؤول س إلى زائد لانهاية ونكتب :

تا (س) $\longrightarrow +\infty$ عندما س $\longrightarrow +\infty$

ليكن الآن الجدول التالي :

س	-10	-10^2	-10^3	-10^4	....
تا(س)	-38	-308	-3008	-30008	....

نلاحظ في هذا الجدول أن قيم (- تا (س)) تكون كبيرة أكثر فأ كثر بقدر ما يكون (- س) كبيرا" . فحسب الحالة السابقة يمكن القول :

(- تا (س)) ⟵ +∞ عندما (- س) ⟵ +∞

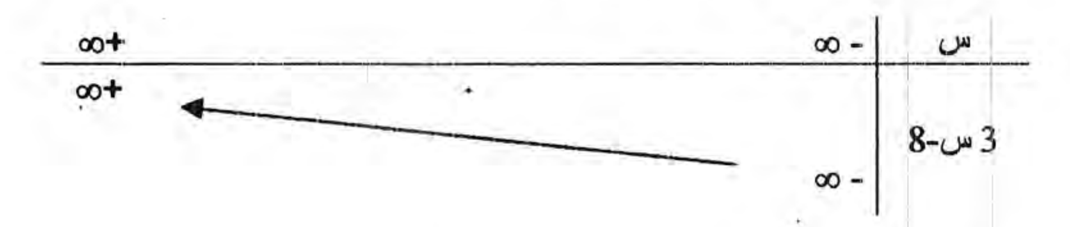
نقول في هذه الحالة :

تا (س) يؤول إلى ناقص لانهاية عندما يؤول س إلى ناقص لانهاية .

ونكتب : تا (س) ⟵ -∞ عندما س ⟵ -∞

. جدول التغيرات

نلخص النتائج السابقة في الجدول التالي :

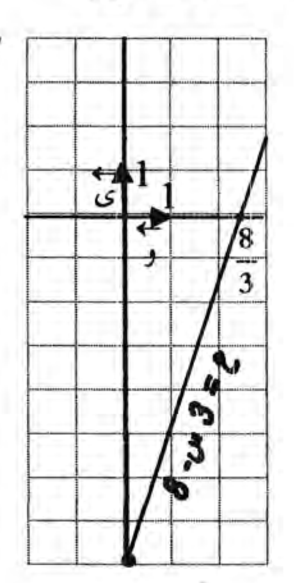


س	-∞	+∞
3 س-8	-∞ ↗	+∞

. التمثيل البياني

ينسب المستوي إلى معلم متعامد متجانس (م ، و⃖ ، ى⃖) .

التمثيل البياني للدالة تا : س ⟼ 3 س – 8 هو مجموعة النقط ن (س ، ع)



من المستوي حيث : س ∈ ح و ع = 3 س – 8

المعادلة ع = 3 س – 8 هي معادلة المستقيم الذي يقطع المحورين في النقطتين :

$(0 ، -8)$ ، $(\frac{8}{3} ، 0)$

3) دراسة الدالة تا : س ⟼ - 2 س + 1

. مجموعة التعريف

الدالة تا معرفة في ح .

ف =] - α ، + α [

. اتجاه التغير

من أجل كل عددين حقيقين مختلفين $س_1$ و $س_2$ لدينا :

$$\frac{تا(س_2) - تا(س_1)}{س_2 - س_1} = \frac{(-2س_2+1) - (-2س_1+1)}{س_2 - س_1} = -2$$

نسبة التزايد سالبة ، فالدالة تا متناقصة في ح .

. دراسة الدالة تا عندما تأخذ |س| قيما" كبرى

الجدول التالي يتضمن بعض القيم الكبيرة للمتغير س وقيم تا (س) المناسبة .

س	10	10^2	10^3	10^4	......
تا(س)	-19	-199	-1999	-19999	......

نلاحظ أن قيم (- تا (س)) تكون كبيرة أكثر فأ كثر بقدر ما يكون س كبيرا" .

هل يمكن جعل (- تا (س)) أكبر من أي عدد معلوم α ؟

لدينا : $- تا(س) > \alpha \Leftrightarrow 2س - 1 > \alpha$

$$\Leftrightarrow س > \frac{\alpha + 1}{2}$$

فمثلاً لكي يكون (- تا (س)) > α يكفي أن يكون $س > \frac{\alpha+1}{2}$

ومنه لكي يكون - تا (س) > 10^6 يكفي أن يكون $س > \frac{10^6+1}{2}$

نقول في هذه الحالة :

تا (س) يؤول إلى ناقص لانهاية عندما يؤول س إلى زائد لانهاية

ونكتب : تا (س) ⟵ - ∞ عندما س ⟵ +∞ .

ليكن الآن الجدول التالي :

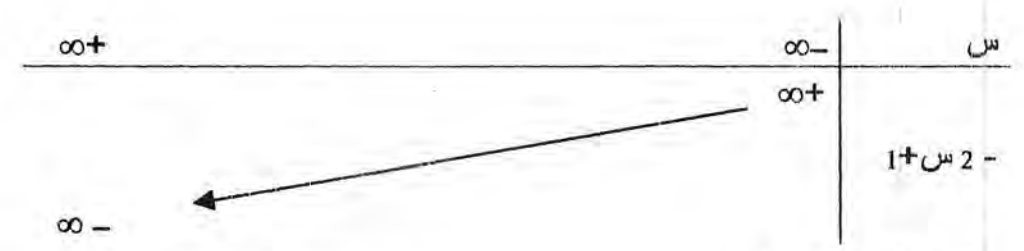
س	-10	-10^2	-10^3	-10^4	....
تا(س)	21	201	2001	20001	....

نلاحظ ، في هذا الجدول ، أن قيم تا (س) تكون كبيرة أكثر فأ كثر بقدر ما يكون (- س) كبيرا" .
فحسب الحالة السابقة يمكن القول :
تا (س) يؤول إلى زائد لانهاية عندما يؤول (- س) إلى زائد لانهاية .
نقول في هذه الحالة :
تا (س) يؤول إلى زائد لانهاية عندما يؤول س إلىناقص لانهاية
ونكتب :

$$\text{تا(س)} \longrightarrow +\infty \quad \text{عندما} \quad \text{س} \longrightarrow -\infty.$$

• **جدول التغيرات :**

نلخص النتائج السابقة في الجدول التالي :



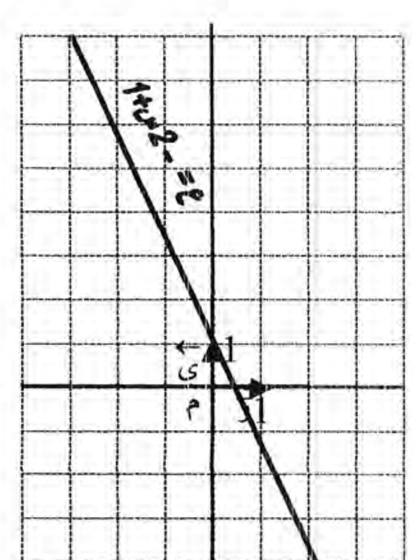
• **التمثيل البياني :**

ينسب المستوي إلى معلم متعامد متجانس (م، $\vec{و}$، $\vec{ى}$).

التمثيل البياني للدالة س $\longmapsto -2$ س $+1$ هو مجموعة النقط ن(س،ع) من المستوي حيث : س∋ح ، ع = -2س$+1$.

المعادلة :

ع = -2 س $+1$ هي معادلة المستقيم الذي يقطع المحورين في النقطتين :(0 ، 1) ، $\left(\frac{1}{2} ، 0\right)$



4) دراسة الدالة تا : س ⟵ أ س+ب $(أ \neq 0)$

- **مجموعة التعريف :**

الدالة تا معرفة في ح .

ف =]− ∞ ، +∞[.

- **إتجاه التغير :**

من أجل كل عددين حقيقيين مختلفين $س_1$ و $س_2$ لدينا :

$$\frac{تا(س_2) - تا(س_1)}{س_2 - س_1} = \frac{(أ س_2 + ب) - (أ س_1 + ب)}{س_2 - س_1} =$$

$$= \frac{أ(س_2 - س_1)}{س_2 - س_1} = أ .$$

إشارة نسبة تزايد الدالة تا هي إشارة أ .

نميز ثلاث حالات :

- إذا كان أ = 0 تكون الدالة تا ثابتة في ح
- إذاكان أ > 0 تكون الدالة تا متزايدة في ح
- إذا كان أ < 0 تكون الدالة تا متناقصة في ح

- **دراسة الدالة تا عندما يأخذ |س| قيما كبرى :**

بتعميم نتائج المثالين السابقين نجد :

إذا كان أ > 0 فإن :	تا(س) ⟵ +∞ عندما س ⟵ +∞ تا(س) ⟵ −∞ عندما س ⟵ −∞
إذا كان أ < 0 فإن :	تا(س) ⟵ −∞ عندما س ⟵ +∞ تا(س) ⟵ +∞ عندما س ⟵ −∞

• جدول التغيرات :

أ > 0

س	−∞	+∞
أس+ب	−∞ ↗	+∞

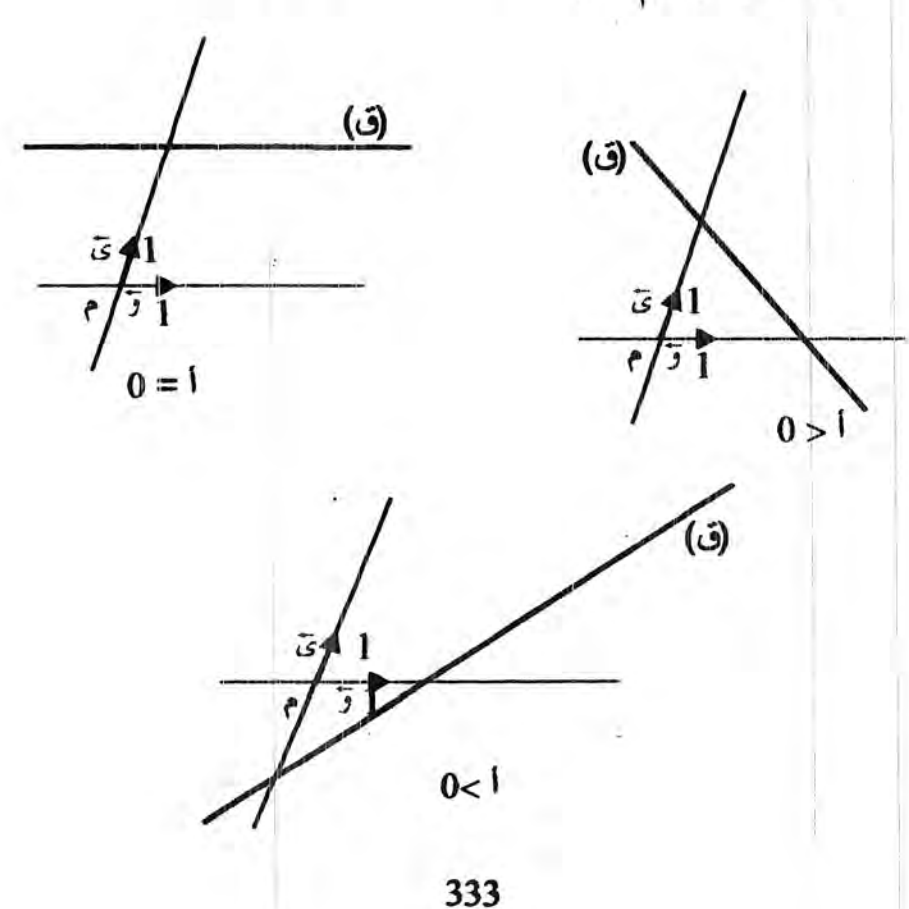
أ < 0

س	−∞	+∞
أس+ب	+∞ ↘	−∞

• التمثيل البياني :

التمثيل البياني للدالة التآلفية تا : س ⟼ أس+ب هو مستقيم (ق) معامل توجيهه هو العدد أ ويقطع محوري الإحداثيات في النقطتين :

(0 ، ب) ، ($-\frac{ب}{أ}$ ، 0) .



3. تطـبيــقات

1) شرط توازي مستقيمين :

ليكن المستقيمان :

($ق_1$) : ع = أ س + ب ، أ ≠ 0

($ق_2$) : ع = أَ س + بَ ، أَ ≠ 0

لنبحث عن شرط توازيهما .

لدينا :

($ق_1$) : أ س- ع +ب = 0 شعاع توجيهه $\overleftarrow{ش}\begin{pmatrix}1\\ أ\end{pmatrix}$

($ق_2$) : أَس- ع + بَ = 0 شعاع توجيهه $\overleftarrow{شَ}\begin{pmatrix}1\\ أَ\end{pmatrix}$

($ق_1$) // ($ق_2$) ⇔ $\overleftarrow{ش}$ // $\overleftarrow{شَ}$

⇔ $\begin{vmatrix}1 & 1\\ أ & أَ\end{vmatrix} = 0$

⇔ أَ - أ = 0

⇔ أ = أَ

ومنه :

يتوازى مستقيمان إذا وفقط إذا كان لهما معامل التوجيه نفسه

مثال :

($ق_1$) : ع = 2 س + 1 وَ ($ق_2$) : ع = 2 س+3 مستقيمان متوازيان .

($ق_1$) : ع = 2 س+1 وَ ($ق_2$) : ع = 3 س+5 مستقيمان غير متوازيين

2) شرط تعامد مستقيمين :

ليكن المستقيمان :

($ق_1$) : ع = أ س+ب ؛ أ ≠ 0 ، $\overleftarrow{ش}$ شعاع توجيه له

($ق_2$) : ع = أَس+بَ ؛ أَ ≠ 0 ، $\overleftarrow{شَ}$ شعاع توجيه له .

ولنبحث عن شرط تعامدهما

لدينا : $(ق_1) \perp (ق_2) \Leftrightarrow \vec{ش} \perp \vec{ش'}$

نعلم أنه إذا كان الشعاعان $\vec{ش}\begin{pmatrix}1\\ أ\end{pmatrix}$ و $\vec{ش'}\begin{pmatrix}1\\ أ'\end{pmatrix}$ متعامدين

فإن $1 \times 1 + أ.أ' = 0$ أي $أ.أ' = -1$

ومنه :

> يتعامد مستقيمان إذا وفقط إذا كان جداء معاملي توجيهيهما مساويا -1

3) الحل البياني لجملة معادلتين :

مثال :

لنحل بيانيا الجملة الخطية : $\begin{cases} 2س + ع - 3 = 0 \\ 3س - ع - 2 = 0 \end{cases}$

لحل هذه الجمله بيانيا :

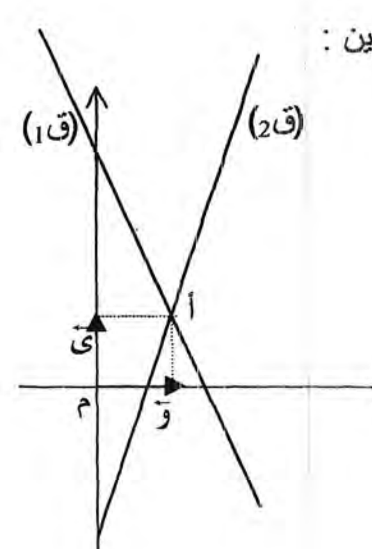
• نرسم بالنسبة إلى معلم $(م، \vec{و}، \vec{ى})$ كلا من المستقيمين :

$(ق_1)$: $2س + ع - 3 = 0$

$(ق_2)$: $3س - ع - 2 = 0$

ونحدد نقطة التقاطع ولتكن أ

• نقرأ في الرسم البياني إحداثيي النقطة أ فنحصل على الثنائية (1 ، 1) التي هي حل الجملة المفروضة .



4) لنرسم بيان الدالة : س ⟵ |س+2|

• لنكتب |س+2| بدون رمز القيمة المطلقة

لدينا : |س+2| = س+2 إذا كان س ≥ -2

|س+2| = - س- 2 إذا كان س ≤ - 2

ومنه كتابة الدالة بدون قيمة مطلقة :

• في المجال] - ∞ ، - 2] : س ⟵ - س- 2

• في المجال [- 2 ، + ∞[: س ⟵ س+2

لتمثيل الدالة س : ⟵ |س+2| نرسم المستقيمين :

(ق) : ع = س+2 حيث س ≥ - 2

(ك) : ع = - س- 2 حيث س ≤ - 2

الشكل :

التمثيل البياني للدالة س ⟵ |س+2|

هو إتحاد نصفي المستقيمين

المرسومين بخط غليظ .

4) تعيين دالة تالفية :

• لنعين الدالة تا : س ⟵ أ س+ب

الممثلة بالمستقيم (ق) الذي يشمل

النقطتين $ن_1$(1،1) و $ن_2$(2،3) .

نعلم أن المعادلة المختصرة للمستقيم (ق) هي من الشكل : ع = أ س+ب

ولنبحث عن المعاملين أ وَ ب .

لدينا :

$ن_1$ ∋ (ق) ⟺ 1 = أ × 1 + ب (1)

$ن_2$ ∋ (ق) ⟺ 3 = أ × 2 + ب (2)

إذن أ وَ ب هما حل الجملة
{ أ + ب = 1
{ 2أ + ب = 3 .

بحل هذه الجملة نحصل على أ = 2 وَ ب = - 1

فالدالة المطلوبة هي : س ⟵ 2 س-1

• لنعين الدالة تا : س ⟵ أ س+ ب الممثلة بالمستقيم (ق) الذي يشمل النقطة

$ن_1$(0 ، - 2) ويوازي الشعاع $\vec{ش}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$.

نعين معادلة مستقيم (ق) يشمل $ن_1$ ويوازي الشعاع $\overrightarrow{ش}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$

لتكن ن(س،ع) نقطة من المستوي .

$\overrightarrow{ن_1ن}\begin{pmatrix}س\\ع+2\end{pmatrix}$

ن ∈ (ق) ⟺ $\begin{vmatrix}س & 1\\ ع+2 & 3\end{vmatrix} = 0$

⟺ 3 س- (ع+2) = 0

⟺ ع = 3 س- 2 .

فالدالة المطلوبة هي : س ⟼ 3 س- 2 .

تمارين

1 أدرس تغيرات كلٍ من الدوال الآتية :

- شكل جدول تغيرات كلٍ منها
- أنشئ ممثل كلٍ منها بالنسبة إلى معلم متعامد متجانس (م، و، ى) .

1) $س \longmapsto س - 3$
2) $س \longmapsto -3س - 3$
3) $س \longmapsto -\frac{س}{3} + 5$
4) $س \longmapsto -س$
5) $س \longmapsto 0,5س - 3$
6) $س \longmapsto -4س + 6$
7) $س \longmapsto -\frac{2س}{3} - 2$
8) $س \longmapsto 2$
9) $س \longmapsto -3$
10) $س \longmapsto \frac{1}{2}$
11) $س \longmapsto -\frac{1}{3}س$
12) $س \longmapsto \frac{س - 3}{2}$
13) $س \longmapsto -\frac{2}{3}(س + 2) + 2$
14) $س \longmapsto \frac{1}{3}(س + 3) - 2$

2 أدرس تغيرات كلٍ من الدوال الآتية :

- أكتب كلا منها بدون رمز القيمة المطلقة .
- شكل جدول تغيرات كل منها حسب كل مجال
- مثل كلا منها بالنسبة إلى معلم متعامد متجانس (م، و، ى) .

1) $س \longmapsto |س|$
2) $س \longmapsto |س - 1|$
3) $س \longmapsto |2س + 3|$
4) $س \longmapsto 2 - |س|$
5) $س \longmapsto |س| + 3$
6) $س \longmapsto |3س| - 2$
7) $س \longmapsto |س + 1| + 2$
8) $س \longmapsto -3|-س + 2|$

3 أرسم في معلم متعامد متجانس كلا من المستقيمات الآتية :

- عين من بينها المستقيمات المتوازية
- عين من بينها المستقيمات المتعامدة

(ق$_1$) : ع = - س+1 ، (ق$_2$) : ع = 2 س+3

(ق$_3$) : ع = 3 س- 4 ، (ق$_4$) : ع = - 5 س

(ق$_5$) : ع = $\frac{1}{5}$ س+1 ، (ق$_6$) : ع = $-\frac{1}{3}$ س+2

(ق$_7$) : ع = - س+4 ، (ق$_8$) : ع = 3 (س+2)

(ق$_9$) : ع = 2 س+ $\frac{1}{2}$ ، (ق$_{10}$) : ع = 8 (س+2)- 12

4. عين الدالة التي يمثلها المستقيم (ق) في الحالات التالية :

1) (ق) يشمل النقطتين أ(1،5) و ب(3 ، $-\frac{1}{2}$)

2) (ق) يشمل النقطتين أ(2،- 1) و ب(0،- 1)

3) (ق) يشمل النقطتين م(0،0) و أ(-2 ، $\frac{1}{2}$)

5. عين الدالة الممثلة بمستقيم (ق) في الحالات التالية :

1) (ق) يشمل النقطة أ(1، 3) ويوازي الشعاع $\overleftarrow{ش}\begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}$

2) (ق) يشمل النقطة أ(0،1) ويوازي الشعاع $\overleftarrow{ش}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

3) (ق) يشمل النقطة أ(-2،1) ويوازي الشعاع $\overleftarrow{ش}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

20 الدالــــة س ⟵ أ س² ، أ ≠ 0

• النشاط التمهيدي

• أتمم الجدول :

س	3-	2-	1-	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1+	2+	3+
س²	..	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

• من الجدول أوجد قيم س التي تحقق س > س² ، وقيم س التي تحقق س < س²

• حل في ح المتراجحة س > س² ثم تحقق من نتائج السؤال السابق .

2. دراسة الدالة تا : س ⟵ أ س² ، أ ≠ 0

1) دراسة الدالة تا : س ⟵ 3 س² .

• **مجموعة التعريف :**

الدالة تا معرفة في ح . ف =] - ∞ ، +∞ [

• **إتجاه التغير :**

من أجل كل عددين حقيقيين $س_1$ وَ $س_2$ لدينا :

$$\frac{تا(س_2) - تا(س_1)}{س_2 - س_1} = \frac{3س_2^2 - 3س_1^2}{س_2 - س_1}$$

$$= 3(س_2 + س_1)$$

إشارة نسبة تزايد الدالة تا هي إشارة $3(س_2 + س_1)$

• إذا كان $س_1$ و $س_2$ من المجال] - ∞ ، 0] فإن $3(س_2 + س_1) < 0$

• إذا كان $س_1$ و $س_2$ من المجال [0 ، +∞ [فإن $3(س_2 + س_1) > 0$

وبالتالي :

تا متناقصة في المجال] - ∞ ، 0] وَ متزايدة في المجال [0 ، +∞ [.

لدينا : تا(0) = 0 و ∀ س ∈ ح : 3 س$^2 \geq 0$

إذن تا(س) ≥ تا(0) وهذا يعني أن أصغر قيمة للدالة تا هي 0 .

• دراسة الدالة تا : س ⟼ 3 س^2 عندما يأخذ |س| قيماً كبرى :

بإعطاء المتغير س قيما موجبة كبيرة أكثر فأكثر وتعيين صورها (الجدول):

س	10	10^2	10^3	....
تا(س)= 3 س^3	300	30000	3000000	....

نجد أن الصور تا(س) موجبة تكبر أكثر فأكثر عندما تكبر قيم المتغير س
نقول في هذه الحالة :
تا(س) يؤول إلى زائد لانهاية عندما س يؤول إلى زائد لانهاية
ونكتب :

تا(س) ⟵ $+\infty$ عندما س ⟵ $+\infty$

وبإعطاء س قيماً سالبة ، قيمها المطلقة كبيرة أكثر فأكثر وتعيين صورها (الجدول)

س	10-	10^2-	10^3-	....
تا(س)=3 س^2	300	30000	3000000	....

نجد أن الصور تا (س) موجبة وتكبر أكثر فأ كثر عندما تكبر القيم المطلقة للمتغير س . نقول في هذه الحالة :
تا (س) يؤول إلى زائد لانهاية عندما س يؤول إلى ناقص لانهاية .
ونكتب :

تا(س) ⟵ $+\infty$ عندما س ⟵ $-\infty$

. جدول تغيرات س ⟼ 3 س^2

نلخص النتائج السابقة في الجدول التالي :

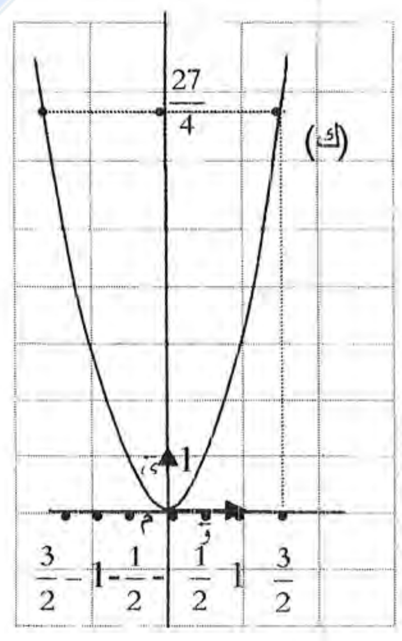
س	$-\infty$		0		$+\infty$
تا(س)= 3 س^2	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

التمثيل البياني للدالة : س ⟼ 3 س ^{2} :

ينسب المستوي إلى معلم متعامد متجانس $(\text{م}، \overleftarrow{\text{و}}، \overleftarrow{\text{ى}})$.

الممثل البياني (ك) للدالة تا : س ⟼ 3 س^2 هو مجموعة النقط ن (س ، ع) بحيث : س ∈ ح و ع = 3 س^2 .

لرسم (ك) نشكل جدولا يتضمن إحداثيات بعض النقط من (ك) .



$\frac{3}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	1-	$-\frac{3}{2}$	س
$\frac{27}{4}$	3	$\frac{3}{4}$	0	$\frac{3}{4}$	3	$\frac{27}{4}$	ع=3س^2

هذه النقط هي نقط من منحنٍ (ك) يسمى قطعا مكافئا (الشكل). النقطة م تسمى ذروة هذا القطع .
محور التراتيب هو محور تناظر لهذا القطع

2) دراسة تغيرات الدالة تا : س ⟼ - س^2

. مجموعة التعريف

الدالة س ⟼ - س^2 معرفة في ح

ف =] - ∞ ، + ∞ [

. اتجاه التغير

من أجل كل عددين حقيقين مختلفين س$_1$ ، س$_2$ لدينا :

$$\frac{\text{تا}(\text{س}_2) - \text{تا}(\text{س}_1)}{\text{س}_2 - \text{س}_1} = \frac{-\text{س}_2^2 - (-\text{س}_1^2)}{\text{س}_2 - \text{س}_1} = -(\text{س}_2 + \text{س}_1)$$

إذا كان $س_1$ ، $س_2$ من المجال] - ∞ ، 0] فإن − ($س_2$ + $س_1$) > 0
و إذا كان $س_1$ ، $س_2$ من المجال [0 ، + ∞ [فإن − ($س_2$ + $س_1$) < 0
فالدالة س ⟼ - $س^2$ متزايدة في المجال] - ∞ ، 0]
و متناقصة في المجال [0 ، + ∞ [

لدينا : تا (0) = 0 و ∀ س ∈ ح : - $س^2$ ≤ 0
إذن تا (س) ≤ تا (0) وهذا يعني أن أكبر قيمة للدالة تا هي تا (0)
نقول إن تا (0) هي القيمة الكبرى للدالة تا .

• دراسة الدالة س ⟼ - $س^2$ عندما يأخذ | س| قيماً كبرى

• لنعط للمتغير س بعض القيم الموجبة الكبيرة أكثر فأكثر ونحسب صورها (الجدول)

س	10^2	10^3	10^4	....
تا(س) = - $س^2$	- 100	- 1000000	- 10000000	....

نجد أن القيم المطلقة للصور تا (س) تكبر أكثر فأكثر عندما تكبر قيم س .
نقول في هذه الحالة :
تا (س) يؤول إلى ناقص لانهاية عندما يؤول س إلى زائد لانهاية .
ونكتب : تا (س) ⟵ - ∞ عندما س ⟵ + ∞
• لنعط الآن للمتغير س بعض القيم السالبة التي قيمها المطلقة كبيرة أكثر فأكثر ونحسب صورها (الجدول)

س	-10^2	-10^3	-10^4	....
تا(س) = - $س^2$	- 100	- 1000000	- 10000000	....

فنجد أن القيم المطلقة للصور تا (س) تكبر أكثر فأكثر عندما تكبر القيم المطلقة للمتغير س .
نقول في هذه الحالة :
تا (س) يؤول إلى ناقص لانهاية عندما يؤول س إلى ناقص لانهاية .
ونكتب :
تا (س) ⟵ - ∞ عندما س ⟵ - ∞

- **جدول التغيرات**

نلخص النتائج السابقة في الجدول التالي :

س	$-\infty$		0		$+\infty$
تا(س)= - س^2	$-\infty$	↗	0	↘	$-\infty$

- **التمثيل البياني للدالة : س ⟵ - س^2**

ينسب المستوي إلى معلم متعامد متجانس $(م ، \overleftarrow{و} ، \overleftarrow{ى})$

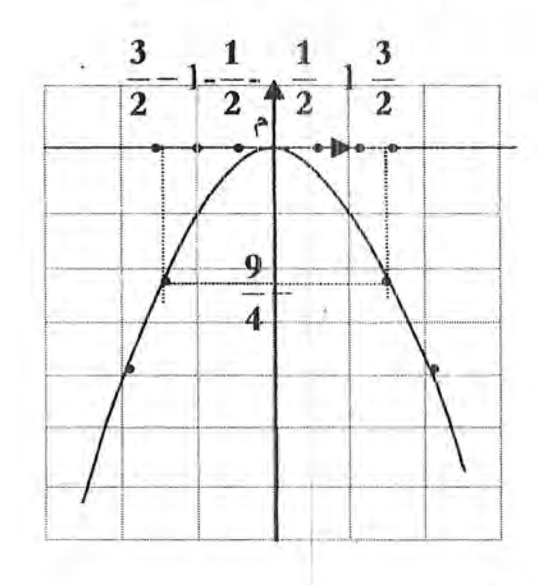
الممثل البياني للدالة س ⟵ - س^2 هو مجموعة النقط ن (س ، ع) حيث :

س ∋ ح و ع = - س^2

لرسم (ك) نشكل جدولاً يتضمن إحداثيات بعض النقط من (ك) :

س	2-	$-\frac{3}{2}$	1-	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
تا(س)= - س^2	4-	$-\frac{9}{4}$	1-	$-\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	1-	$-\frac{9}{4}$	4-

النقاط ن(س ، ع) هي نقاط من منحن يسمى أيضا" قطعا مكافئا (الشكل) .



3) . دراسة الدالة تا : س ⟼ أ س^2 ، أ $\neq 0$

• **مجموعة التعريف :**

الدالة تا : س ⟼ أ س^2 معرفة في ح

فَ =] - ∞ ، + ∞ [

• **اتجاه التغير**

من أجل كل عددين حقيقيين مختلفين س$_1$ ، س$_2$ لدينا :

$$\frac{\text{تا}(س_2) - \text{تا}(س_1)}{س_2 - س_1} = \frac{أ\,س_2^2 - أ\,س_1^2}{س_2 - س_1}$$

$$= أ\,(س_2 + س_1)$$

إشارة نسبة تزايد الدالة تا هي إشارة أ (س$_2$ + س$_1$) . نميز حالتين حسب إشارة أ

• أ > 0 :

في المجال] - ∞ ، 0] يكون س$_2$ + س$_1$ < 0 والجداء أ (س$_2$ + س$_1$) < 0

في المجال [0 ، + ∞ [يكون س$_2$ + س$_1$ > 0 والجداء أ (س$_2$ + س$_1$) > 0

• أ < 0 :

في المجال] - ∞ ، 0] يكون س$_2$ + س$_1$ < 0 والجداء أ (س$_2$ + س$_1$) > 0

في المجال [0 ، + ∞ [يكون س$_2$ + س$_1$ > 0 والجداء أ (س$_2$ + س$_1$) < 0

ومنه :

• إذا كان أ > 0 فإن الدالة س ⟼ أ س^2 :
متناقصة في المجال] - ∞ ، 0] ومتزايدة في المجال [0 ، + ∞ [.

• إذا كان أ < 0 فإن الدالة س ⟼ أ س^2
متزايدة في المجال] - ∞ ، 0] ومتناقصة في المجال [0 ، + ∞ [.

• دراسة تا (س) عندما يأخذ | س | قيما كبرى

نميز حالتين حسب المثالين المدروسين سابقا" :

أ > 0 :

• تا (س) ⟶ + ∞ عندما س ⟶ + ∞

• تا (س) ⟶ + ∞ عندما س ⟶ - ∞

أ < 0 :

• تا (س) ⟶ - ∞ عندما س ⟶ - ∞

• تا (س) ⟶ - ∞ عندما س ⟶ + ∞

- **جدول تغيرات الدالة س ⟼ أ س^2**

نلخص نتائج الدراسة السابقة في الجدولين الآتيين حسب إشارة أ .

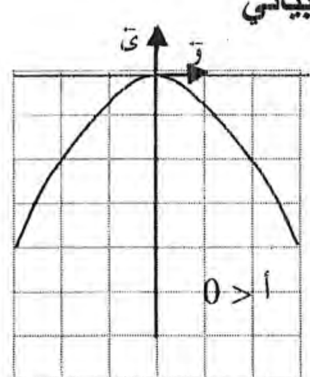
أ > 0

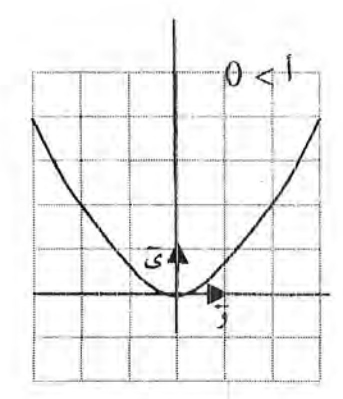
س	-∞ 0 +∞
تا(س)= أ س^2	+∞ ↖ 0 ↙ +∞ (متناقصة من +∞ إلى 0 ثم متزايدة إلى +∞)

أ < 0

س	-∞ 0 +∞
تا(س)= أ س^2	-∞ ↗ 0 ↘ -∞ (متزايدة من -∞ إلى 0 ثم متناقصة إلى -∞)

- **التمثيل البياني**





1) تعيين الدالة : س ⟼ أ س

- لنعين الدالة تا : س ⟼ أ س^2 التي ممثلها (ى) يشمل النقطة ن(1،3) .

لدينا معادلة (ى) هي من الشكل : ع = أ س^2

ن∈ (ى) ⟺ 3 = أ × 1^2

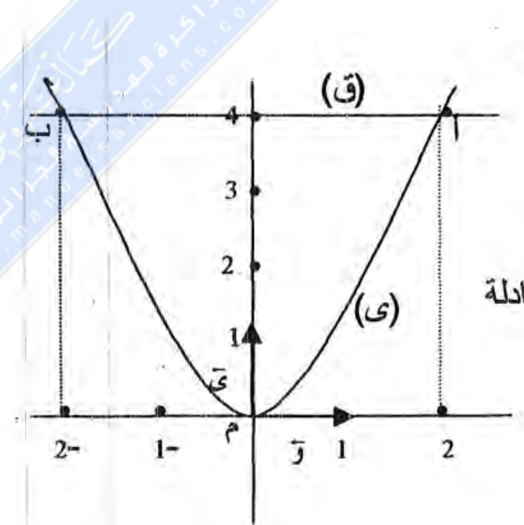
⟺ أ = 3

فالدالة التي ممثلها البياني (ى) هي : س ⟼ 3 س^2

2) الحل البياني للمعادلة : س^2 = ... (... 0)

مثال :

لنحل المعادلة : س^2 = 4.

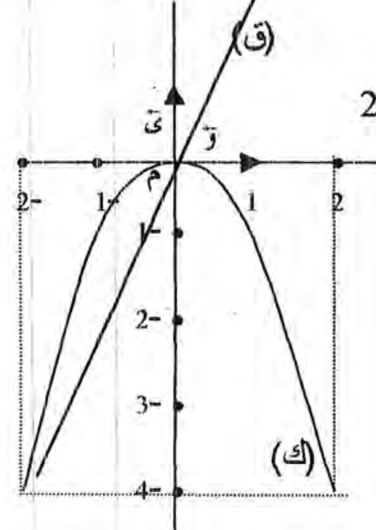


• نرسم كلا من القطع المكافئ (ى) للدالة س ⟵ س^2 والمستقيم (ق) : ع = 4
نقرأ فاصلتي أ و ب نقطتي تقاطع (ق) وَ (ى) إن وجدتا فنحصل على العددين −2 وَ 2 اللذين هما حلا المعادلة س^2 = 4 .

3) تقاطع قطع مكافئ و مستقيم

مثال :

ليكن القطع المكافئ : (ك) : ع = − س^2 والمستقيم (ق) : ع = 2 س .
نقاط تقاطع (ك) و (ق) ، إن وجدت ، هي النقاط ن(س، ع) التي تحقق إحداثيا كل منها في آنٍ واحد معادلتي القطع (ك) والمستقيم (ق) .
أي أن فواصل النقط ن(س،ع) هي حلول المعادلة :− س^2 = 2 س ذات المجهول س
لدينا :



− س^2 = 2 س ⟺ س^2 +2 س = 0
⟺ س(س+2) = 0
⟺ س = 0 أو س = −2

ترتيبا نقطتي التقاطع هما :

- من أجل س = 0 يكون ع = 0
- من أجل س = −2 يكون ع = −4

فالمستقيم (ق) يقطع (ك) في نقطتين هما :
م(0،0) و أ (−2 ، −4) الشكل :

1 أدرس تغيرات كلٍ من الدوال الآتية ثم :

- أنشئ جدول تغيراتها
- أنشئ ممثلاً لتغيراتها في مستوٍ منسوب إلى معلم متعامد متجانس (م، $\vec{و}$، $\vec{ى}$) .

1) $س \longmapsto س^{2}$ 2) $س \longmapsto -س^{2}$ 3) $س \longmapsto -3س^{2}$

4) $س \longmapsto 5س^{2}$ 5) $س \longmapsto \frac{1}{2}س^{2}$ 6) $س \longmapsto -\frac{1}{3}س^{2}$

2 α عدد حقيقي ، (ك) القطع المكافئ الممثل للدالة $س \longmapsto \alpha س^{2}$

- عين α لكي تنتمي النقطة أ إلى (ك) في كلٍ من الحالات التالية :

1) أ(1،4) 2) أ($\sqrt{2}$ ، 1) ، 3) أ($\frac{1}{2}$ ، 1) ، 4) أ(-2 ، $\frac{1}{3}$)

5) أ(5 ، -3) ، 6) أ($-\sqrt{3}$ ، 3)

- أرسم في كل حالة من الحالات السابقة القطع المكافئ (ك)

3 عين نقط تقاطع القطع المكافئ (ك) والمستقيم (ق) في كلٍ من الحالات التالية:

1) (ك) : $ع = س^{2}$ و (ق) : $ع = 4س$

2) (ك) : $ع = -2س^{2}$ و (ق) : $ع = -\frac{1}{2}س$

3) (ك) : $ع = 3س^{2}$ و (ق) : $ع = 5س$

4) (ك) : $ع = \frac{1}{2}س^{2}$ و (ق) : $ع = 4س$

5) (ك) : $ع = س^{2}$ و (ق) : $ع = 2س - 1$

6) (ك) : $ع = 9س^{2}$ و (ق) : $ع = -6س - 1$

7) (ك) : $ع = 9س^{2}$ و (ق) : $ع = -\frac{1}{2}س$

4 حل بيانيا كلاً من المعادلات التالية :

1) $س^{2} = 1$ 2) $س^{2} = -1$

3) $س^{2} = 5$ 4) $س^{2} = 9$

5) $س^{2} = 8$ 6) $س^{2} = 12$

21 الدالة س $\longmapsto \frac{أ}{س}$ ، أ $\neq 0$

1 ـ نشاط تمهيدي

. أتمم الجدول التالي :

س	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	-2	-3	+2	+3	1000	-2000
$\frac{1}{س}$												

• قارن بين إشارتي س و $\frac{1}{س}$ وبين قيمتيهما .

• أوجد من الجدول قيم س التي تحقق : س < $\frac{1}{س}$. وقيم س التي تحقق س > $\frac{1}{س}$.

2 ـ دراسة الدالة : س $\longmapsto \frac{أ}{س}$ ، أ $\neq 0$.

1) دراسة الدالة تا : س $\longmapsto \frac{3}{س}$.

. مجموعة التعريف :

الدالة تا معرفة في ح* ، أي ف =] - ∞ ، 0 [∪] 0 ، + ∞ [

وهي فردية .

. اتجاه التغير :

من أجل كل عددين حقيقين مختلفين $س_1$ ، $س_2$ ينتميان معا إما إلى] - ∞ ، 0 [وإما إلى] 0 ، + ∞ [، لدينا :

$$\frac{تا(س_2) - تا(س_1)}{س_2 - س_1} = \frac{\frac{3}{س_2} - \frac{3}{س_1}}{س_2 - س_1} = - \frac{3}{س_1 س_2}$$

فإشارة نسبة تزايد الدالة تا هي إشارة ($- س_1 س_2$) .

وبما أن الجداء $س_1 س_2 > 0$ في كل من المجالين] - ∞ ، 0 [و] 0 ، + ∞ [

فإن $- س_1 س_2 < 0$ في كلّ من هذين المجالين .

وبالتالي :

تا متناقصة في كل من المجالين] - ∞ ، 0 [و] 0 ، + ∞ [.

. دراسة الدالة $س \longmapsto \frac{3}{س}$ عندما تأخذ |س| قيما" كبرى .

بإعطاء المتغير س قيما" موجبة كبيرة أكثر فأكثر وتعيين صورها (الجدول) :

س	10	10^2	10^3	....
$تا(س) = \frac{3}{س}$	0,3	0,03	0,003	....

نجد أن الصور تا (س) موجبة صغيرة ، وتقترب من الصفر أكثر فأكثر ، بقدر ما تكبر قيم المتغير س .

نقول في هذه الحالة :

تا (س) يؤول إلى الصفر بقيم موجبة عندما يؤول س إلى زائد لانهاية .

ونكتب : تا (س) $\xrightarrow{>}$ 0 عندما س ⟵ + ∞ .

وبإعطاءالمتغير قيما" سالبة ، قيمها المطلقة كبيرة أكثر فأكثر وتعيين صورها (الجدول) :

س	10-	10^2-	10^3-	....
$تا(س) = \frac{3}{س}$	0,3-	0,03-	0,003-	....

نجد أن الصور تا (س) سالبة ، قيمها المطلقة صغيرة وتقترب من الصفر أكثر فأكثر ، بقدر ما تكبر قيم |س| .

نقول في هذه الحالة :

تا (س) يؤول إلى الصفر بقيم سالبة عندما يؤول س إلى ناقص لانهاية .

ونكتب : تا (س) $\xrightarrow{>}$ 0 عندما س ⟵ $-\infty$.

دراسة الدالة تا من أجل قيم س القريبة من الصفر :

. بإعطاء المتغير س قيما" موجبة قريبة من الصفر أكثر فأ كثر وتعيين صورها (الجدول) :

س	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10^2}$	$\frac{1}{10^3}$	....
تا(س)= $\frac{3}{س}$	30	300	3000	....

نجد أن الصور تا (س) موجبة ، وتكبر أكثر فأ كثر بقدر ما تصغر قيم س .

نقول في هذه الحالة :

تا (س) يؤول إلى زائد لانهاية عندما يؤول س إلى الصفر بقيم موجبة .

ونكتب : تا (س) ⟵ $+\infty$ عندما س $\xrightarrow{<}$ 0

. وبإعطاء س قيما" سالبة ، قريبة من الصفر أكثر فأ كثروتعيين صورها(الجدول)

س	$-\frac{1}{10}$	$-\frac{1}{10^2}$	$-\frac{1}{10^3}$	....
تا(س)= $\frac{3}{س}$	-30	-300	-3000	-----------

نجد أن الصور تا (س) سالبة . وقيمها المطلقة تكبر أكثر فأ كثر بقدر ما تصغر قيم | س | . نقول في هذه الحالة :

تا (س) يؤول إلى ناقص لانهاية عندما يؤول س إلى الصفر بقيم سالبة ونكتب :

تا (س) ⟵ $-\infty$ عندما س $\xrightarrow{>}$ 0

. جدول التغيرات :

نلخص النتائج السابقة في الجدول التالي :

س	$-\infty$	0	$+\infty$
تا(س)= $\frac{3}{س}$	0 ↘ $-\infty$	‖ $+\infty$ ↘ 0	

الخط المزدوج يدل على أن الدالة تا غير معرفة عند الصفر .

. التمثيل البياني :

ينسب المستوي إلى معلم متعامد متجانس (م ، $\overleftarrow{و}$ ، $\overleftarrow{ي}$)

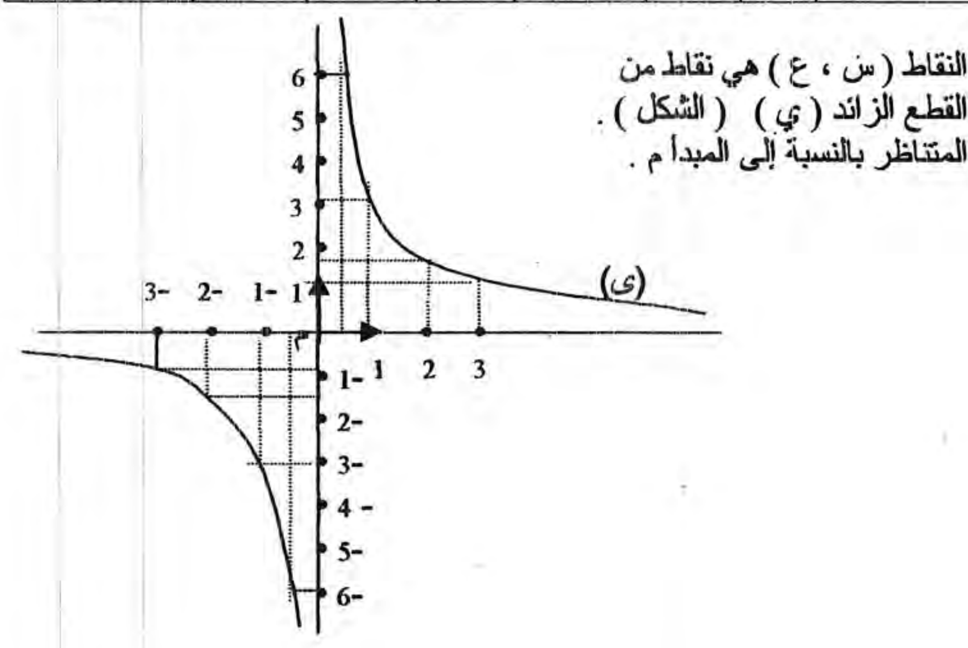
الممثل البياني (ي) للدالة تا : س $\longmapsto \frac{3}{س}$ هو مجموعة النقط ن (س ، ع)

حيث س ∋ ح* و ع = $\frac{3}{س}$. ويسمى قطعا" زائدا" .

ويكون (ي) متناظرا" بالنسبة إلى المبدأ م لأن تا فردية .

لرسم (ي) نشكل جدولا" كالتالي :

س	3-	2-	1-	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3
ع = $\frac{3}{س}$	1-	$-\frac{3}{2}$	3-	6-		6	3	$\frac{3}{2}$	1-



النقاط (س ، ع) هي نقاط من القطع الزائد (ي) (الشكل) . المتناظر بالنسبة إلى المبدأ م .

2) . دراسة الدالة تا : س $\longmapsto \frac{-2}{\text{س}}$

. مجموعة التعريف :

الدالة تا معرفة في ح* ، أي ف =] - ∞ ، 0 [∪] 0 ، + ∞ [
وهي فردية .

. اتجاه التغير :

من أجل كل عددين حقيقين مختلفين س_1 و س_2 ينتميان معا" إما إلى] - ∞ ، 0 [
وإما إلى] 0 ، + ∞ [لدينا :

$$\frac{\text{تا}(\text{س}_2) - \text{تا}(\text{س}_1)}{\text{س}_2 - \text{س}_1} = \frac{\frac{-2}{\text{س}_2} - \frac{-2}{\text{س}_1}}{\text{س}_2 - \text{س}_1} = \frac{2}{\text{س}_1 \text{س}_2}$$

فإشارة نسبة تزايد الدالة تا هي إشارة الجداء $\text{س}_1 \text{س}_2$.
وبما أن $\text{س}_1 \text{س}_2 > 0$ في كلّ من] - ∞ ، 0 [و] 0 ، + ∞ [فإن الدالة متزايدة في كلّ من هذين المجالين .

دراسة الدالة تا عندما تأخذ |س| قيما" كبرى .

. بإعطاء المتغير س قيما" موجبة كبيرة أكثر فأكثر وتعيين صورها (الجدول) :

س	10	10^2	10^3	....
تا(س)= $\frac{2}{\text{س}}-$	0,2-	0,02-	0,002-	....

نجد أن الصور تا (س) سالبة ، وقيمها المطلقة تصغر وتقترب من الصفر أكثر فأكثر بقدر ما تكبر قيم س .
نقول في هذه الحالة :
تا (س) يؤول إلى الصفر بقيم سالبة عندما يؤول س إلى زائد لانهاية .
ونكتب : تا (س) $\xrightarrow{<}$ 0 عندما س ⟵ + ∞
. بإعطاء س قيما" سالبة قيمها المطلقة كبيرة أكثر فأكثر وتعيين صورها(الجدول)

س	-10	-10^{2}	-10^{3}	....
تا(س)= $-\frac{2}{س}$	0,2	0,02	0,002	....

نجد أن الصور تا (س) موجبة صغيرة وتقترب من الصفر أكثر فأ كثر بقدر ما تكبر القيم المطلقة للمتغير س .

نقول في هذه الحالة :

تا (س) يؤول إلى الصفر بقيم موجبة عندما يؤول س إلى ناقص لانهاية .

ونكتب : تا (س) $\xrightarrow{>}$ 0 عندما س ⟵ $-\infty$

دراسة الدالة تا من أجل قيم المتغير س القريبة من الصفر 0

. بإعطاء المتغير س قيما موجبة قريبة من الصفر أكثر فأ كثر ، وتعيين صورها (الجدول) :

س	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10^{2}}$	$\frac{1}{10^{3}}$	....
تا(س)= $-\frac{2}{س}$	20-	200-	2000-	....

نجد أن الأعداد تا (س) سالبة ، وقيمها المطلقة تكبر أكثر فأ كثر بقدر ما تصغر قيم س وتقترب من الصفر .

نقول في هذه الحالة :

تا (س) يؤول إلى ناقص لانهاية عندما يؤول س إى الصفر بقيم موجبة .

ونكتب : تا (س) ⟵ $-\infty$ عندما س $\xrightarrow{>}$ 0

وبإعطاء س قيما" سالبة قريبة من الصفر أكثر فأ كثر وتعيين صورها (الجدول) :

س	$-\frac{1}{10}$	$-\frac{1}{10^{2}}$	$-\frac{1}{10^{3}}$	....
تا(س)= $-\frac{2}{س}$	20	200	2000	....

نجد أن الصور تا (س) موجبة وتكبر أكثر فأ كثر بقدر ما تقترب قيم س من الصفر .

نقول في هذه الحالة :

تا (س) يؤول إلى زائد لانهاية عندما يؤول س إلى الصفر بقيم سالبة .

ونكتب : تا (س) ⟵ + ∞ عندما س ⟵ 0 (>)

. جدول التغيرات :

نلخص النتائج السابقة في الجدول التالي :

س	- ∞		0		+ ∞
تا(س)= $-\frac{2}{س}$	0	↗	+∞ ‖ - ∞	↗	0

التمثيل البياني :

نزود المستوي بمعلم متعامد متجانس (م ، $\vec{و}$ ، $\vec{ي}$)

الممثل البياني (ي) للدالة تا : س ⟵ $\frac{-2}{س}$ هو مجموعة النقط

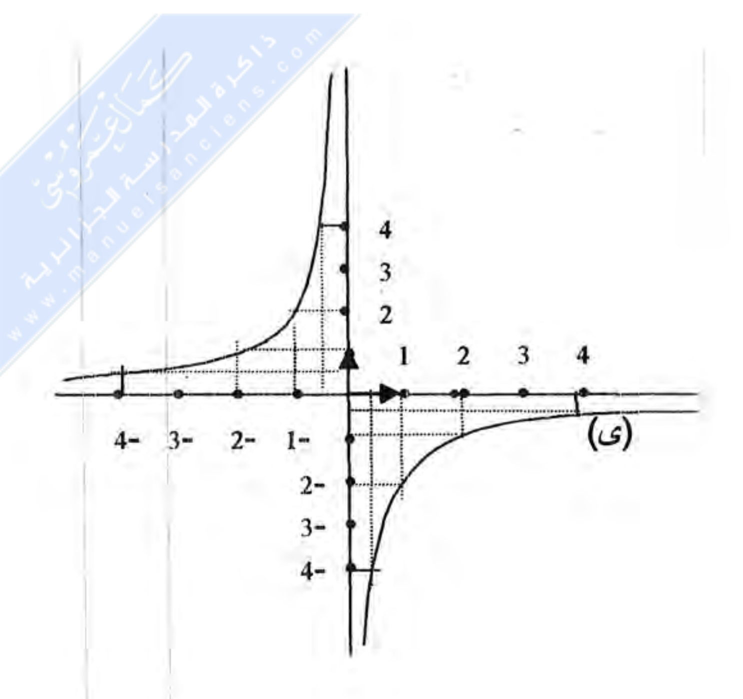
ن (س ، ع) حيث س ∈ ح* و ع = $\frac{-2}{س}$.

يسمى (ي) قطعا" زائدا" . والمبدأ م هو مركز تناظر له .

ولرسم (ي) نشكل جدولا" كالتالي :

س	4-	2-	1-	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2	4
تا(س)= $-\frac{2}{س}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4		4-	2-	1-	$-\frac{1}{2}$

النقط (س ، ع) هي نقاط من القطع الزائد (ي) المتناظر بالنسبة إلى المبدأ م (الشكل).



3) دراسة الدالة تا : س ⟵ $\frac{أ}{س}$ حيث أ ≠ 0

. مجموعة التعريف :

الدالة تا معرفة من أجل كل عدد حقيقي غير معدوم .

ومنه ف =] - ∞ ، 0 [∪] 0 ، + ∞ [

. اتجاه التغير :

من أجل كل عددين حقيقين مختلفين $س_1$ ، $س_2$ ينتميان معاً إما إلى المجال] - ∞ ، 0 [وإما إلى المجال] 0 ، + ∞ [لدينا :

$$\frac{تا(س_2) - تا(س_1)}{س_2 - س_1} = \frac{\frac{أ}{س_2} - \frac{أ}{س_1}}{س_2 - س_1} = \frac{-أ}{س_1 س_2}$$

بما أن س$_1$س$_2$ > 0 في كل من المجالين] - ∞ ، 0 [و] 0 ، + ∞ [فإن إشارة نسبة تزايد الدالة تا هي إشارة المعامل – أ .

لهذا نميز حالتين :

. إذا كان أ > 0 فإن الدالة تا متناقصة في كل من] - ∞ ، 0 [و] 0 ، + ∞ [

. وإذا كان أ < 0 فإن الدالة متزايدة في كل من] - ∞ ، 0 [و] 0 ، + ∞ [.

دراسة قيم تا (س) عندما يأخذ |س| قيما" كبرى أو قيما" صغرى .

. نستخلص من دراسة المثالين : س ⟼ $\frac{3}{س}$ و س ⟼ $\frac{-2}{س}$

أن الدالة تا : س ⟼ $\frac{أ}{س}$ ، أ ≠ 0 لها أربع نهايات ، هي حسب إشارة أ :

أ > 0
تا(س) $\xrightarrow{>}$ 0 عندما س ⟶ - ∞
تا(س) ⟶ - ∞ عندما س $\xrightarrow{>}$ 0
تا(س) ⟶ + ∞ عندما س $\xrightarrow{<}$ 0
تا(س) $\xrightarrow{<}$ 0 عندما س ⟶ + ∞

أ < 0
تا(س) $\xrightarrow{<}$ 0 عندما س ⟶ - ∞
تا(س) ⟶ + ∞ عندما س $\xrightarrow{>}$ 0
تا(س) ⟶ - ∞ عندما س $\xrightarrow{<}$ 0
تا(س) $\xrightarrow{>}$ 0 عندما س ⟶ + ∞

. جدول التغيرات

نلخص النتائج السابقة في الجدولين الآتيين حسب إشارة أ .

أ > 0

س	- ∞	0	+ ∞
تا(س)= $\frac{أ}{س}$	0 ↙ - ∞		+ ∞ ↙ 0

أ < 0

س	- ∞	0	+ ∞
تا(س)= $\frac{أ}{س}$	0 ↖ + ∞		- ∞ ↖ 0

. التمثيل البياني :

ينسب المستوي إلى معلم متعامد متجانس (م ، $\overleftarrow{\text{و}}$ ، $\overleftarrow{\text{ي}}$)

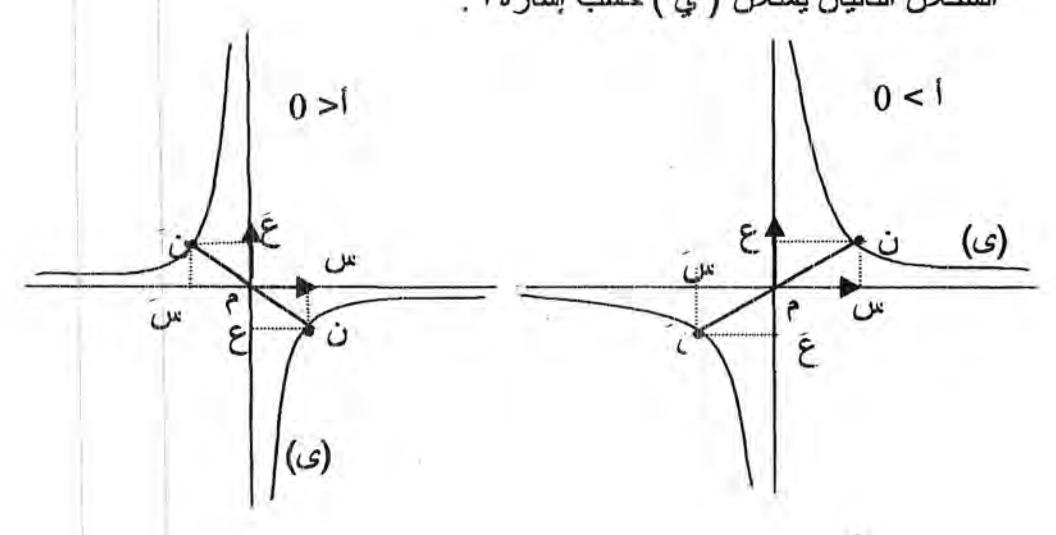
الممثل البياني (ي) للدالة تا : $\text{س} \longmapsto \frac{\text{أ}}{\text{س}}$ ، أ $\neq 0$ هو مجموعة النقط

ن (س ، ع) حيث س $\in$ ف و ع = $\frac{\text{أ}}{\text{س}}$.

يسمى (ي) قطعا" زائدا" . ومعادلته هي ع = $\frac{\text{أ}}{\text{س}}$.

المبدأ م هو مركز تناظر لهذا القطع .

الشكلان التاليان يمثلان (ي) حسب إشارة أ .



3. تطبيقات

1) تعيين الدالة س ⟵ $\frac{أ}{س}$ ، أ ≠ 0

لنعين الدالة تا : س ⟵ $\frac{أ}{س}$ التي ممثلها البياني (ي) يشمل النقطة ن (2 ، - 3)

لدينا : معادلة (ي) من الشكل ع = $\frac{أ}{س}$

ن (2 ، - 3) ∈ (ي) ⟺ - 3 = $\frac{أ}{2}$

⟺ أ = - 6

فالدالة المطلوبة هي س ⟵ $\frac{-6}{س}$.

2) الحل البياني لمعادلة من الشكل : $\frac{1}{س} = \alpha$ س + β .

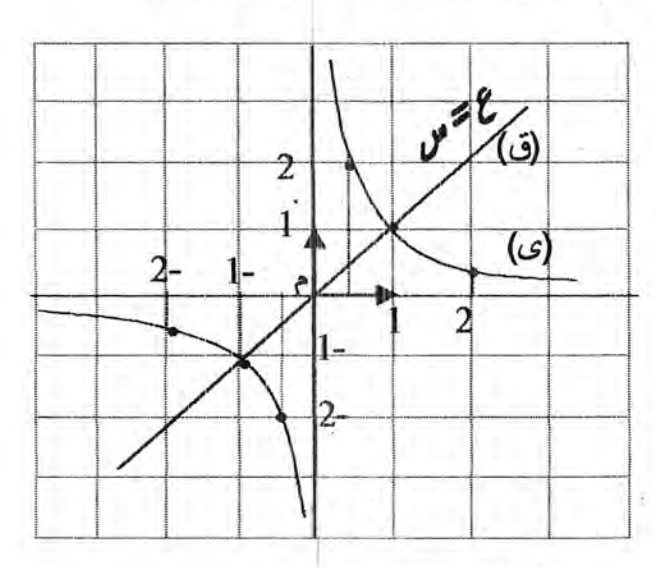
لنحل بيانيا" المعادلة $\frac{1}{س}$ = س .

نرسم في معلم متعامد متجانس (م ، $\overleftarrow{و}$ ، $\overleftarrow{ي}$) كلا" من : القطع الزائد

(ي) : ع = $\frac{1}{س}$

والمستقيم (ق) : ع = س

. نقرأ فواصل نقط تقاطع (ق) و (ي) (إن وجدت) فنحصل على العددين -1 و + 1 اللذين هما حلا المعادلة $\frac{1}{س}$ = س .



3) . تقاطع قطع زائد ومستقيم .

ليكن : القطع الزائد (ي) : ع = $\frac{4}{س}$ والمستقيم (ق) : ع = - س – 4

ولنبحث عن احداثيات نقط تقاطعهما .

لتكن ن (س ، ع) نقطة من المستوي .

ن ∈ (ي) ⇔ ع = $\frac{4}{س}$

ن ∈ (ق) ⇔ ع = - س – 4

إحداثيات نقط تقاطع (ي) و (ق) هي حلول الجملة . $\begin{cases} ع = \frac{4}{س} \\ ع = - س - 4 \end{cases}$

وتكون س فاصلة لنقطة مشتركة إذا وفقط إذا كان :

$\frac{4}{س}$ = - س – 4 .... (1)

(1) ⇔ 4 = - $س^2$ – 4 س

(1) ⇔ $س^2$ + 4 س + 4 = 0

وهذه معادلة من الدرجة الثانية يؤول حلها إلى حل معادلة من الدرجة الأولى .

أي : (1) ⇔ $(س + 2)^2 = 0$

(1) ⇔ س = – 2

ومن أجل س = - 2 يكون ع = - 2

ومنه (ي) و (ق) يتقاطعان في النقطة (- 2 ، - 2) .

تمـــارين

1 ـ ادرس تغيرات كلٍّ من الدوال الآتية :
ـ شكل جدول تغيرات كل منها .
ـ أنشئ تمثيل كل منها في معلم متعامد متجانس (م ، $\overleftarrow{و}$ ، $\overleftarrow{ي}$)

1) س ⟵ $\frac{2}{س}$ 2) س ⟵ $\frac{3}{س}$

3) س ⟵ $\frac{-2}{س}$ 4) س ⟵ $\frac{1}{2س}$

5) س ⟵ $\frac{4}{3س}$ 6) س ⟵ $\frac{-2}{3س}$

2 ادرس تغيرات كل من الدوال الآتية :
ـ اكتب كلاً منها بدون رمز القيمة المطلقة .
ـ شكل جدول تغيرات كل منها .
ـ انشئ الممثل البياني لكل منها في معلم متعامد متجانس (م ، $\overleftarrow{و}$ ، $\overleftarrow{ي}$)

1) س ⟵ $\frac{1}{|س|}$ 2) س ⟵ $\frac{-2}{|س|}$

3) س ⟵ $\frac{-2}{3|س|}$ 4) س ⟵ $\frac{3}{2\sqrt{س^2}}$

3 α عدد حقيقي غير معدوم . (ي) القطع الزائد الممثل للدالة
س ⟵ $\frac{\alpha}{س}$.

ـ عين α لكي تنتمي النقطة أ إلى (ي) في كلٍّ من الحالات التالية :

1) أ (1 ، -2)

2) أ ($\frac{1}{2}$ ، $\frac{1}{3}$)

3) أ (- $\frac{1}{4}$ ، 4)

4) أ (5 ، - $\frac{1}{5}$)

5) أ $(\sqrt{2} ، -\sqrt{2})$

6) أ $\left(\frac{1}{\sqrt{2}-1} ، \sqrt{2}+1\right)$

4 . حل بيانيا" كلا" من المعادلات التالية :

1) $\frac{1}{\text{س}} = \frac{1}{2}$ 2) $\frac{-1}{\text{س}} = 2$

3) $\frac{2}{\text{س}} = 4$ 4) $\frac{1}{4\text{س}} = \frac{1}{2}$

5 . عين نقاط تقاطع المستقيم (ق) والقطع الزائد (ي) ·(إن وجدت) في كل من الحالات التالية :

1) (ي) : $\text{ع} = \frac{2}{\text{س}}$ وَ (ق) : $\text{ع} = -3$

2) (ي) : $\text{ع} = \frac{2}{\text{س}}$ وَ (ق) : $\text{ع} = 4$

3) (ي) : $\text{ع} = \frac{5}{\text{س}}$ وَ (ق) : $\text{ع} = 20\text{س}$

4) (ي) : $\text{ع} = \frac{-9}{\text{س}}$ وَ (ق) : $\text{ع} = \text{س} + 6$

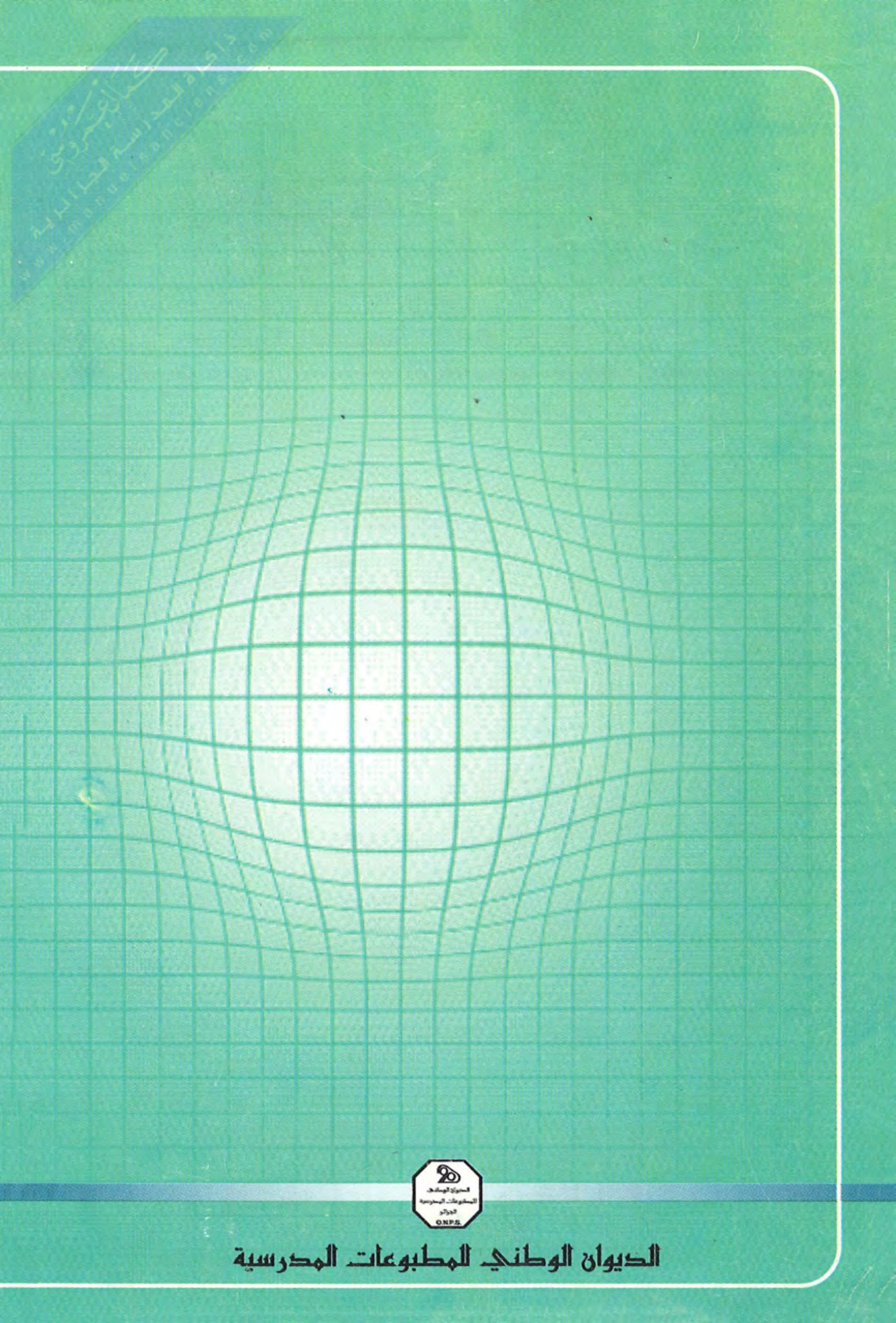
5) (ي) : $\text{ع} = \frac{25}{\text{س}}$ وَ (ق) : $\text{ع} = -4\text{س} - 20$

6) (ي) : $\text{ع} = \frac{-4}{\text{س}}$ وَ (ق) : $\text{ع} = 9\text{س} - 12$.

محتويـــات الكتـــاب

الطبعــة الأولى

2001 - 2000
Code 1132


الديوان الوطني للمطبوعات المدرسية
O.N.P.S.